



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина

**Институт новых материалов
и технологий**

**А. В. СТОЛБОВСКИЙ
М. Л. ЛОБАНОВ**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

А. В. Столбовский
М. Л. Лобанов

Математическое
моделирование процессов
в материаловедении
с использованием MS Excel

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся
по направлению подготовки
22.04.01 «Материаловедение и технологии материалов»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2018

УДК 66.017:004.9:004.4*2075.8
ББК 32.072.131.4я7330.3в6я73
С81

Рецензенты:

завлабораторией диффузии ФГБУН Институт физики металлов УрО РАН
д-р техн. наук, проф. *В. В. Попов*;
кафедра материаловедения и физико-химии материалов Политехнического
института Южно-Уральского государственного университета (завкафе-
дрой д-р техн. наук, проф. *Г. Г. Михайлов*)

Научный редактор — д-р техн. наук, проф. *М. А. Гервасьев*

Столбовский, А. В.

С81 Математическое моделирование процессов в материаловедении с использованием MS Excel : учебное пособие / А. В. Столбовский, М. Л. Лобанов. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. — 96 с.

ISBN 978-5-7996-2488-0

В учебном пособии рассмотрены построение и расчет в табличных процессорах математических моделей технологических процессов и физических явлений, с которыми сталкиваются специалисты в области материаловедения.

Пособие предназначено для обучающихся по программе магистратуры направления 22.04.01 — материаловедение и технологии материалов, а также аспирантов и инженерно-технических работников, занимающихся вопросами моделирования технологических процессов.

Библиогр.: 11 назв. Табл. 4. Рис. 43. Прил. 4.

УДК 66.017:004.9:004.4*2075.8
ББК 32.072.131.4я7330.3в6я73

Учебное издание

Столбовский Алексей Владимирович, **Лобанов** Михаил Львович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL**

Редактор *О. В. Протасова*
Верстка *О. П. Игнатьевой*

Подписано в печать 16.10.2018. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 5,6.
Уч.-изд. л. 4,5. Тираж 40 экз. Заказ 230

Издательство Уральского университета. Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5. Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ. 620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13. Факс: +7 (343) 358-93-06. <http://print.urfu.ru>

ISBN 978-5-7996-2488-0

© Уральский федеральный
университет, 2018

Оглавление

Введение	5
1. Моделирование	6
1.1. Общие понятия. Математическая модель	6
1.1.1. Достоверность результатов моделирования	7
1.1.2. Построение модели	7
1.1.3. Построение математической модели	9
1.2. Численное (компьютерное) моделирование	12
1.2.1. Методы численного решения математических моделей. Численное интегрирование.....	13
1.2.2. Метод прямоугольников	14
1.2.3. Метод трапеций	16
1.2.4. Численное интегрирование функций в Excel ..	18
1.2.5. Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка в Excel	24
1.2.6. Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка в Excel	28
2. Практическое применение численного моделирования	33
2.1. Построение и расчет модели процесса нагрева твердого тела на основе известных физических закономерностей	33
2.1.1. Базовые модельные представления	33
2.1.2. Аналитическое решение	38
2.1.3. Численный расчет модели процесса нагрева твердого тела в Excel.....	41
2.1.4. Учет инерции системы в модели нагрева	49
2.1.5. Численный расчет модели процесса нагрева твердого тела с учетом инерции системы в Excel.....	52

2.1.6. Функциональное моделирование. Реализация модели двухдиапазонного регулятора температуры в Excel	56
2.2. Метод конечных разностей для решения нестационарных задач теплопроводности	62
2.2.1. Метод конечных разностей.....	62
2.2.2. Основные уравнения нестационарной теплопроводности	64
2.2.3. Решение задачи методом конечных разностей	67
Заключение	83
Библиографический список.....	84
Приложение 1	87
Приложение 2	88
Приложение 3	90
Приложение 4	94

Введение

Часто решение прикладных физических и металловедческих задач сильно затруднено или даже невозможно без математического моделирования. Так, создание модели какого-то явления или процесса может дать возможность проанализировать те его особенности, которые не очевидны или об их существовании в принципе может быть ничего неизвестно.

В то же время наше представление о тех или иных процессах или явлениях само по себе является нашим модельным представлением о них. И мы, еще обучаясь в школе, изучали и применяли «общепринятые модели» для решения задач, например, по физике. При этом использовали уже готовые, данные нам в учебниках решения или математическое описание того или иного явления.

При этом современный уровень развития вычислительной техники и программного обеспечения позволяет использовать наработанный математический аппарат и современный подход к реализации численных методов, не прибегая к сложному программированию. А табличные процессоры, такие как MS Excel или OpenOffice/LibreOffice Calc, позволяя, используя только базовый функционал этих продуктов, производить расчеты, в том числе и достаточно сложных математических моделей.

Для усвоения и развития навыков применения численных методов у студентов магистратуры в Прил. 3 предложены варианты заданий для их выполнения, в соответствии с рабочими программами направления 22.04.01 — Материаловедение и технологии материалов.

1. Моделирование

1.1. Общие понятия. Математическая модель

Моделирование — это исследование каких-либо явлений, процессов или систем объектов путем построения и изучения их моделей; использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов. Моделирование — одна из основных категорий теории познания: на идее моделирования по существу базируется любой метод научного исследования — как теоретический (при котором используются различного рода знаковые, абстрактные модели), так и экспериментальный (использующий предметные модели) [1].

Соответственно, *математическая модель* — математическое представление реальности [2], один из вариантов модели как системы, исследование которой позволяет получать информацию о некоторой другой системе. А процесс построения и изучения математических моделей называется *математическим моделированием*.

Таким образом, материаловедение, как и все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, фактически занимается математическим моделированием: представляет объект исследования его математической моделью, затем ее изучает и в дальнейшем применяет для решения прикладных задач.

Математические модели могут быть классифицированы: по поведению во времени; по виду входной информа-

ции или, например, по типу используемого математического аппарата.

При этом связь математической модели с реальностью осуществляется с помощью цепочки гипотез, идеализаций и упрощений, при помощи математических методов описывается некий идеальный объект, построенный по имеющимся представлениям.

Поэтому достоверность, как форма существования истины, обоснованной количественным способом, крайне важна при математическом моделировании. Это важный показатель эффективности модели.

1.1.1. Достоверность результатов моделирования

Достоверность результатов моделирования можно оценить путем сопоставления модельных заключений, оценок, следствий и выводов с реально наблюдаемой действительностью. Саму процедуру оценки достоверности результатов моделирования называют **анализом адекватности** (соответствия) модели ее моделируемому объекту, системе или процессу. В то же время в моделировании адекватность — это условное понятие, так как полного соответствия модели реальному объекту быть не может: иначе это была бы не модель, а сам объект.

Так, при моделировании имеется в виду не адекватность в целом, а адекватность тем свойствам модели, которые для исследования считаются существенными.

1.1.2. Построение модели

Моделирование — это творческий процесс, но тем не менее существуют алгоритмы или, по-другому, определенные наборы шагов (этапов) при разработке математической модели.

Процесс моделирования можно разбить на следующие этапы [3].

На самом первом этапе определяют конечные цели моделирования, набор факторов и показателей, взаимосвязь между ними и их роль в рамках поставленной задачи: какие из них можно считать входными, а какие — выходными.

На следующем этапе приступают уже к постулированию, математической формализации и, если возможно, к экспериментальной проверке исходных допущений. Если принимаемые допущения не могут быть проверены экспериментально, то их подкрепляют известными теоретическими рассуждениями о механизме, природе и качественном характере «физики» исследуемого процесса или объекта. Этот этап называют этапом анализа априорной информации.

Третий этап называют моделирующим. Он включает в себя непосредственный вывод общего вида модельных соотношений, связывающих входные и выходные параметры между собой. Следует отметить, что на этом этапе определяется лишь структура модели, в которой, наряду с известными числовыми значениями, будут присутствовать величины, физический смысл которых определен, а числовые значения — нет.

На четвертом этапе моделирования, который можно охарактеризовать как статистический анализ модели, с помощью методов статистической обработки данных решают задачу наилучшего подбора неизвестных параметров, входящих в аналитическую запись модели, а также производят исследование свойств полученной модели.

Пятый этап посвящен процедуре сопоставления модельных значений с реально наблюдаемой действительностью и называется он этапом статистического анализа адекватности модели.

И, наконец, на шестом этапе планируют и проводят исследования, направленные на уточнение модели, т. е. на дальнейшее развитие и углубление второго этапа, который в определенной мере является ключевым.

1.1.3. Построение математической модели

Для иллюстрации вспомним всем известные законы классической механики. Например, уравнение падения тела в условиях земного притяжения [4].

Выведем его из общих представлений. Составим математическую модель и получим ее решение.

Начнем с описания наших представлений об этом явлении или процессе.

Пусть имеется точка массой m . Исследуем ее движение по вертикали под действием силы земного притяжения. Примем за ось вертикальную прямую, по которой движется (падает) точка. Начало оси поместим на поверхность земли, а положительное направление оси условимся отсчитывать вверх. В то же время падение (движение) точки должно происходить с течением времени. Т.е. решением задачи (результатом моделирования) этого явления должно быть уравнение, которое будет описывать положение точки по оси в любой момент времени t после начала ($t = 0$) ее движения. Таким образом, искомой функцией будет y (координата, указывающая на положение по вертикальной оси), а независимой переменной будет время t .

На следующем этапе составим уравнение для нахождения y .

Для того чтобы составить уравнение, необходимо обратиться к уже имеющимся у нас представлениям о реальном мире и их математическому описанию. Так, нам известно, что движение тела к земной оси происходит с ускорением. Если скорость — это первая производная координаты по времени, то ускорение (в математическом описании) — вторая производная по времени от координаты. И математически это можно записать как $\frac{d^2 y}{dt^2}$. В то же время мы знаем, что ускорение силы

тяжести в каждой точке на поверхности земли постоянно и (приблизительно) равно $9,81 \text{ м/с}^2$. Обозначим его буквой g .

При этом необходимо помнить, что ускорение свободного падения направлено вниз, т. е. в отрицательную сторону в нашей системе координат, что необходимо учесть, сменив его знак на противоположный. Соответственно, приравнивая два найденных выражения, мы уже можем сделать математическое описание нашего явления:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g. \quad (1.1)$$

Поскольку время нами задается, а ускорение свободного падения изначально известно, то оно в нашем представлении будет константой. Очевидно, что в данном описании неизвестным является функция y , описывающая координату.

Так, чтобы найти описание движения точки со временем, нам нужно найти функцию вида $y = f(t)$, которое и будет решением уравнения (1.1).

Для того чтобы решить уравнение такого вида, необходимо его интегрировать, поскольку интеграл, с математической точки зрения, является обратным действием дифференцированию.

Необходимо выражение (1.1) преобразовать, разделив переменные, чтобы в правой части тоже присутствовал дифференциал:

$$\int \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \int dt. \quad (1.2)$$

Теперь, проинтегрировав обе части формулы (1.2), получим:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1. \quad (1.3)$$

Так, из левой части ушел двойной дифференциал, а в правой части с преобразованием дифференциала появилась константа интегрирования C_1 .

Снова разделим переменные. Для этого перенесем dt в правую часть и запишем интеграл:

$$\int dy = -g \int t dt + C_1 \int dt.. \quad (1.4)$$

Проинтегрировав выражение (1.4), получим:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2, \quad (1.5)$$

где появляется вторая константа интегрирования C_2 . Выражение (1.5) — уже есть общее решение уравнения (1.1). Однако оно все еще содержит две произвольные (неопределенные) постоянные C_1 и C_2 . Необходимо выяснить физический смысл этих величин.

Для начала определим C_1 . Зададим начальное условие в начальный момент для уравнения (1.3). В левой части остается первая производная координаты по времени, а это есть скорость. Соответственно, учитывая, что это состояние в начальный момент, получаем начальную скорость точки в начальный момент:

$$C_1 = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} = v_0. \quad (1.6)$$

Аналогично поступим при определении C_2 . Подставив в уравнение (1.5) $t = 0$, получаем:

$$C_2 = (y)_{t=0} = y_0. \quad (1.7)$$

Очевидно, что константа C_2 представляет собой начальную координату.

Теперь можно записать общее решение:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0. \quad (1.8)$$

Полученное готовое аналитическое решение теперь можно использовать, подставляя в него начальные условия. Оно описывает всевозможные варианты развития процесса во времени.

1.2. Численное (компьютерное) моделирование

На практике далеко не всегда можно получить аналитическое решение. Поэтому в настоящее время все чаще используются методы численного (компьютерного) моделирования.

Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения сложных систем. Компьютерные (численные) модели проще и удобнее исследовать в силу их возможности проводить так называемые вычислительные эксперименты в тех случаях, когда реальные эксперименты затруднены из-за финансовых или физических препятствий или могут дать непредсказуемый результат. При этом логичность и формализованность таких моделей упрощает выявление основных факторов, определяющих свойства изучаемого объекта. Как, например, исследовать отклик моделируемой физической или технологической системы на изменения ее параметров и начальных условий.

В численном моделировании обычно выделяют «аналитическое» и «имитационное моделирование». При «аналитическом моделировании» изучаются математические (абстрактные) модели реального объекта в виде алгебраических, дифференциальных и других уравнений, а также однозначной вычислительной процедуры, приводящей к их численному решению. В случае же имитационного моделирования исследуются математические модели в виде некоторого алгоритма или набора алгоритмов, воспроизводящих функционирование исследуемой системы путем последовательного выполнения большого количества элементарных операций.

Так, необходимо подчеркнуть, что численное (компьютерное) моделирование позволяет получать решение только в численном виде, а не в виде аналитического выражения.

1.2.1. Методы численного решения математических моделей. Численное интегрирование

Для понимания численных методов рассмотрим подробнее такое математическое преобразование как интегрирование. Поскольку именно интегрирование является основным и наиболее сложным, в реализации на практике, математическим действием при решении дифференциальных уравнений как основы математической модели. Таким образом, его численная реализация и позволит получить готовое численное решение.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона — Лейбница [5]:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (1.9)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Однако во многих случаях первообразная функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной; вследствие этого вычисление определенного интеграла по формуле (1.9) может быть затруднительным или даже практически невыполнимым.

Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Поэтому важное значение имеют приближенные и, в первую очередь, численные методы вычисления определенных интегралов.

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции [6].

Обычный прием вычисления состоит в том, что данную функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ заменяют некоторой интерполирующей или аппроксимирующей функцией

$\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx. \quad (1.10)$$

При этом функция $\varphi(x)$ должна быть такова, чтобы интеграл (1.10) вычислялся непосредственно.

Теперь рассмотрим наиболее простые в реализации виды функции $\varphi(x)$ и методы численного интегрирования с ее использованием.

Для численного интегрирования функции одной переменной наиболее простыми являются методы прямоугольников и трапеций. Подробнее об этих методах можно прочесть в источнике [5].

1.2.2. Метод прямоугольников

Метод прямоугольников является наиболее простым. Его суть состоит в замене сложного вида кривой, под которой считается площадь, на прямоугольники.

В соответствии с названием метода необходимо разбить промежуток интегрирования на некоторое количество отрезков (на практике могут быть как равные, так и неравные отрезки), на каждом из которых необходимо построить прямоугольник, одна из его сторон лежит на оси абсцисс, а противоположная является высотой до подынтегральной функции. Далее вычисляется площадь полученной ступенчатой фигуры, которая и будет приближенной оценкой площади криволинейной функции (рис. 1.1).

Очевидно, что прямоугольники можно построить не только так, как показано на рис. 1.1, а многими способами.

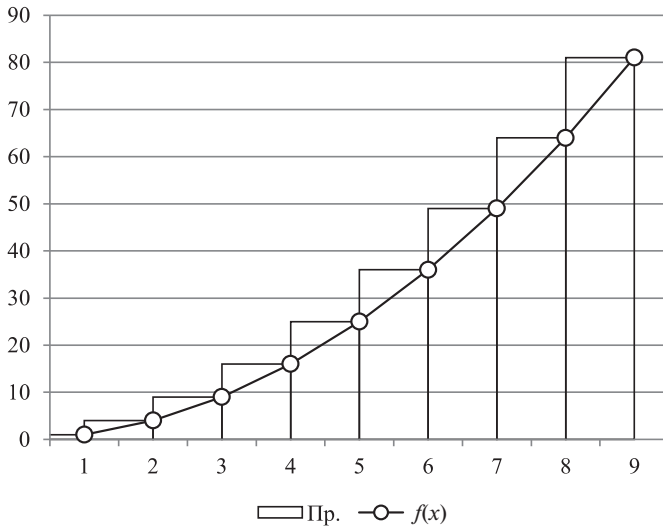


Рис. 1.1. Вариант построения по методу прямоугольников

Стандартно рассматривают три модификации:

- метод левых прямоугольников — построение прямоугольников с пересечением в верхнем левом углу;
- метод правых прямоугольников — с пересечением в правом углу;
- метод средних прямоугольников — с пересечением в середине верхней грани прямоугольника (рис. 1.2).

Видно, что в качестве высот прямоугольников здесь принимаются значения функции, вычисленные в серединах промежуточных отрезков, и в общем виде формула приближенных вычислений запишется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (1.11)$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где h — шаг разбиения на равные отрезки.

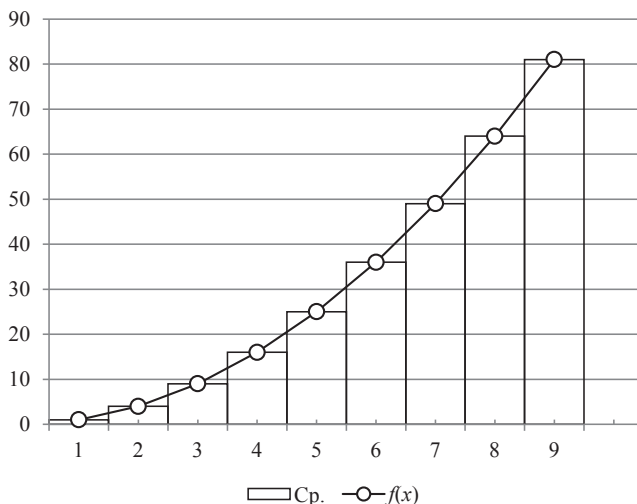


Рис. 1.2. Вариант построения по методу средних прямоугольников

Можно увидеть, что предложенный вариант приближенного расчета интеграла не содержит ни определения первообразной, ни определения какой-либо другой сложной функции. Все действия сводятся к вычислению самой подынтегральной функции в разных частях отрезка и их суммированию.

Такое простое описание криволинейной функции в виде ступеней будет вносить погрешность в конечный результат. Поэтому для повышения точности прямоугольники можно заменить на трапеции.

1.2.3. Метод трапеций

Как и в методе прямоугольников, метод трапеций также подразумевает разбиение промежутка интегрирования на некоторое количество отрезков (на практике могут быть как равные, так и неравные отрезки). И на каждом отрезке необходимо по-

строить трапецию, одна из сторон которой лежит на оси абсцисс, а противоположная является линией, соединяющей крайние точки пересечения с подынтегральной функцией на отрезке. Далее вычисляется площадь полученной многогранной фигуры, которая и будет приближенной оценкой площади под подынтегральной функцией.

На рис. 1.3 представлена схема замены сегмента кривой, вписанной в отрезок трапецией.

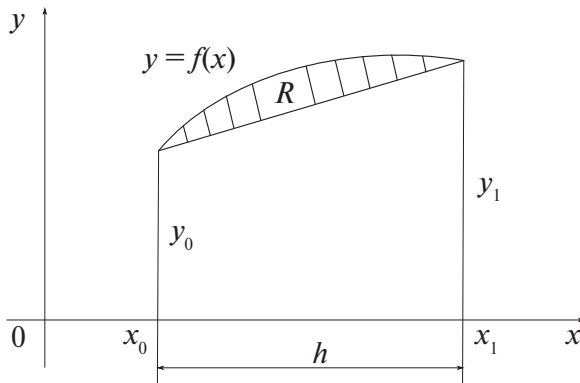


Рис. 1.3. Метод трапеций

На рис. 1.3, показывающем реализацию метода трапеций, видно, что замена прямоугольника на трапецию должна вносить меньше погрешностей в конечный результат. Поэтому очевидным преимуществом данного метода является его достаточная простота реализации, сравнимая с методом прямоугольников, и потенциально меньшие вносимые в конечный результат погрешности. Математически его можно записать следующими выражениями:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right), \quad (1.12)$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где, как и в выражении (1.11), h — шаг разбиения на равные отрезки.

Подытожив, можно сделать вывод, что все эти методы заключаются в:

- 1) разбиении интервала (отрезка) интегрирования на n равных более мелких отрезков;
- 2) замене на каждом таком мелком отрезке исходной функции (ее графика) соответственно: горизонтальной прямой или наклонной прямой;
- 3) вычислении площади полученной фигуры, которая приблизительно равна площади под графиком функции, т. е. искомому интегралу.

Также следует отметить, что рассмотренные методы имеют преимущество в простоте реализации в табличном процессоре, например, Excel, поскольку фактически позволяют реализовать их пошагово в виде расчета, шаг за шагом суммируя каждое приращение интеграла, что является очень наглядным и удобным для реализации и позволяет детально рассматривать развитие процессов в составленной модели.

1.2.4. Численное интегрирование функций в Excel

На практике реализация представленных методов в табличных процессорах, таких как расчет непосредственно квадратурных формул (1.11) и (1.12), не всегда бывает удобным в силу изначально заложенных в выражения равных отрезков, на которые происходит разбиение интервала интегрирования. Поскольку в реальном эксперименте далеко не всегда данные накапливаются исключительно через равные промежутки, то целесообразно использовать общее описание методов при реализации в Excel, с учетом возможных не всегда одинаковых шагов интегрирования. Для использования предлагаемых методик в программах OpenOffice/LibreOffice Calc в Прил. 1 дается таблица совмести-

мости функций, используемых в расчетах. В Прил. 4 — общие рекомендации по организации расчетов в табличных процессорах, следование которым позволит избежать потери времени и дополнительных ошибок в расчетах, а также упростит процесс построения расчета и его модернизации в будущем для решения более сложных задач.

Для начала реализуем наиболее простые методы правых и левых прямоугольников, например, для параболы вида $y = x^2$ в интервале от 0 до 10 с шагом 1. В столбец A внесем данные для переменной x , а в ячейку A2 внесем расчетную формулу с указанием на соответствующую координату x , как выражение $=A2^2$ и распространим это выражение для всех введенных координат x . Далее в ячейку C12 введем выражение для расчета площади прямоугольника, как показано на рис. 1.4.

	A	B	C	D	E
1	x	y	Si		
2	0	0			
3	1	1	1		
4	2	4	4		
5	3	9	9		
6	4	16	16		
7	5	25	25		
8	6	36	36		
9	7	49	49		
10	8	64	64		
11	9	81	81		
12	10	100	$=(A12-A11)*B12$		
13		S=	385		
14					

Рис. 1.4. Пример расчета интеграла по методу правых прямоугольников

Записав выражение для расчета $=(A12-A11)*B12$, распространим его до ячейки C3, но исключив ячейку C2 в соответствии с формулой (1.10). И заключительным действием будет суммирование площадей прямоугольников в ячейке C13, как $=СУММ(C2: C12)$.

Аналогично запишем расчет по методу левых прямоугольников. Для этого, как показано на рис. 1.5, в ячейку D2 введем формулу $= (A3-A2)*B2$ и распространим ее на весь диапазон D2: D11, который теперь, соответственно, исключает крайнюю правую точку. И как в предыдущем расчете, просуммируем получившиеся значения в ячейке D13, записав выражение $=\text{СУММ}(D2:D12)$.

СУММ				
	A	B	C	D
1	x	y	Si (Пр.)	Si (Лев.)
2	0	0		$=(A3-A2)*B2$
3	1	1	1	1
4	2	4	4	4
5	3	9	9	9
6	4	16	16	16
7	5	25	25	25
8	6	36	36	36
9	7	49	49	49
10	8	64	64	64
11	9	81	81	81
12	10	100	100	
13		S=	385	285
14				

Рис. 1.5. Пример расчета интеграла по методу левых прямоугольников

Очевидно, что две реализации одного и того же метода привели к различному результату. Это легко объяснить, если обратиться к геометрическому представлению данных реализаций [7] (рис. 1.6).

Видно, что при односторонней реализации метода прямоугольников результат будет отличаться в зависимости от сочетания угла наклона кривой и вида реализации. В результате будут либо завышенные значения, либо заниженные.

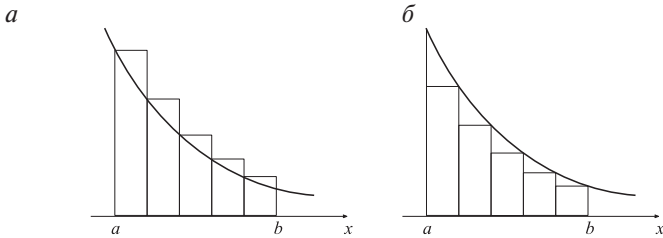


Рис. 1.6. Геометрическое представление метода прямоугольников:
 a — левые прямоугольники, b — правые прямоугольники

Для получения однозначных результатов воспользуемся реализацией метода средних прямоугольников, как показано на рис. 1.2. Так, в соответствии с методом, необходимо считать значения функции не на краях отрезка, а в его середине. Для этого рассчитаем в ячейке $E2$ среднее значение между двумя координатами, которые мы использовали для предыдущих реализаций, как $=\text{CPЗНАЧ}(A2:A3)$. И распространим эту формулу на весь диапазон $E2:E11$. В ячейку $F2$ внесем расчет функции в новых точках $=E2^2$ и также распространим формулу на весь диапазон, как показано на рис. 1.7.

СУММ ✕ ✓ f_к $=\text{CPЗНАЧ}(A2:A3)$						
	A	B	C	D	E	F
1	x	y	Si (Пр.)	Si (Лев.)	x (Ср.)	y (Ср.)
2	0	0			$=\text{CPЗНАЧ}(A2:A3)$	0,25
3	1	1	1	1	$\text{CPЗНАЧ}(\text{число1}; [\text{число2}]; \dots)$	
4	2	4	4	4	2,5	6,25
5	3	9	9	9	3,5	12,25
6	4	16	16	16	4,5	20,25
7	5	25	25	25	5,5	30,25
8	6	36	36	36	6,5	42,25
9	7	49	49	49	7,5	56,25
10	8	64	64	64	8,5	72,25
11	9	81	81	81	9,5	90,25
12	10	100	100			
13		S=	385	285		
14						332,5

Рис. 1.7. Пример расчета интеграла по методу средних прямоугольников

Теперь можно рассчитать площади прямоугольников. Для этого внесем выражение $= (A3-A2)*F2$ в ячейку $G2$. И также распространим на расчетный диапазон ячеек $E2: E11$. В заключение расчета осталось просуммировать полученные площади прямоугольников в ячейке $G13$, введя выражение $=\text{СУММ} (G2: G12)$.

Расчет показал, что результат, посчитанный по методу средних прямоугольников, оказался между значениями, полученными правой и левой реализациями метода прямоугольников. Однако его воплощение оказалось более трудоемким.

Теперь для сравнения реализуем метод трапеций. В соответствии с этим методом, как показано на рис. 1.3, нам будет необходимо посчитать площади трапеций на каждом отрезке. Площадь трапеции вычисляется умножением среднего ее основания на высоту. В нашем случае основаниями будут значения подынтегральной функции в краях отрезка. Для реализации в Excel не потребуется пересчитывать значения функции, рассчитанные нами ранее для метода правых и левых прямоугольников. А для расчета площадей трапеций введем в ячейке $H2$ формулу $=\text{СРЗНАЧ} (B2: B3)*(A3-A2)$ и распространим ее на диапазон $H2: H11$, как показано на рис 1.8. Далее, как для всех предыдущих методов, произведем суммирование в ячейке $H13$, записав формулу $=\text{СУММ} (H2: H12)$.

СУММ										=CP3HA4(B2:B3)*(A3-A2)	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	x	y	Si (Пр.)	Si (Лев.)	x (Ср.)	y (Ср.)	Si (Ср.)	Si (Тр.)			
2	0	0		0	0,5	0,25	0,25	=CP3HA4(B2:B3)*(A3-A2)			
3	1	1	1	1	1,5	2,25	2,25	CP3HA4(число1; [число2]; ...)			
4	2	4	4	4	2,5	6,25	6,25	6,5			
5	3	9	9	9	3,5	12,25	12,25	12,5			
6	4	16	16	16	4,5	20,25	20,25	20,5			
7	5	25	25	25	5,5	30,25	30,25	30,5			
8	6	36	36	36	6,5	42,25	42,25	42,5			
9	7	49	49	49	7,5	56,25	56,25	56,5			
10	8	64	64	64	8,5	72,25	72,25	72,5			
11	9	81	81	81	9,5	90,25	90,25	90,5			
12	10	100	100								
13		=	385	285			332,5	335			
14											

Рис. 1.8. Пример расчета интеграла по методу трапеций

Ожидаемо, что различные методы, в силу различной реализации, будут давать различные значения. Однако необходимо установить, какой из рассмотренных методов дал наиболее близкий результат. Для чего рассчитаем аналитически заложенный в задаче интеграл вида $y = x^2$ с выбранными границами отрезка $[0; 10]$.

Так, взяв этот несложный интеграл, получим выражение для первообразной вида $F(x) = x^3/3$. И рассчитаем, например, в ячейке C14, записав выражение $=A12^3/3-A2^3/3$, в котором вычисляем значения первообразной для двух крайних значений нашего диапазона и находим их разность (рис. 1.9).

C14		fx		=A12^3/3-A2^3/3				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	Si (Пр.)	Si (Лев.)	x (Ср.)	y (Ср.)	Si (Ср.)	Si (Тр.)
2	0	0		0	0,5	0,25	0,25	0,5
3	1	1	1	1	1,5	2,25	2,25	2,5
4	2	4	4	4	2,5	6,25	6,25	6,5
5	3	9	9	9	3,5	12,25	12,25	12,5
6	4	16	16	16	4,5	20,25	20,25	20,5
7	5	25	25	25	5,5	30,25	30,25	30,5
8	6	36	36	36	6,5	42,25	42,25	42,5
9	7	49	49	49	7,5	56,25	56,25	56,5
10	8	64	64	64	8,5	72,25	72,25	72,5
11	9	81	81	81	9,5	90,25	90,25	90,5
12	10	100	100					
13		S=	385	285			332,5	335
14		S(Ан.)=	333,33					
15								

Рис. 1.9. Пример расчета интеграла по методу трапеций и прямоугольников в сравнении с аналитически рассчитанным значением

Как и предполагалось, методы средних прямоугольников и трапеций дают наиболее приближенный к реальному, рассчитанному аналитически, результат.

В заключении необходимо отметить, что точность численных методов в разных условиях будет разной. Все определяется видом подынтегральной функции и тем, насколько малый будет выбран шаг по разбиению отрезка аппроксимирующими фигурами. Чем меньше шаг, тем более точным будет результат. В то же время реализация метода трапеций выглядит наиболее предпочтительной из реализаций трех рассмотренных методов, поскольку имеет простую запись и не требует равных отрезков разбиения, как реализация метода средних прямоугольников.

1.2.5. Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка в Excel

Для понимания возможностей численных методов в практическом применении решим дифференциальное уравнение (1.3) численно. Вначале запишем его в удобном виде с уже известной нам константой C_1 , как начальной скоростью:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0. \quad (1.13)$$

Дальнейшим действием, как и в предыдущем случае, будет разделение переменных. Перезапишем это уравнение как:

$$dy = -gtdt + v_0dt. \quad (1.14)$$

Очевидно, что на следующем этапе будет необходимо произвести интегрирование. При аналитическом решении мы использовали неопределенный интеграл. В случае же численного решения также необходимо интегрирование, однако возможности численных методов позволяют не производить манипуляции с переменными, такими как неопределенный интеграл, который далеко не всегда удастся найти, а произвести его численный расчет, где решением будет некоторое число.

Для того чтобы получить численное решение, необходимы начальные условия, т. е. нужно численно задать все константы и переменные, входящие в уравнение. И уже когда все численные значения будут известны, можно произвести численное интегрирование каким-либо из численных методов, описанных ранее (раздел 1.2.4).

Следуя описанным ранее рекомендациям по численному интегрированию, выберем в качестве метода численного интегрирования метод трапеций и реализуем в среде Excel.

Зададим константы и запишем в таблицу шаги, соответствующие шагу интегрирования, для независимой переменной t и расчет самой переменной t (рис. 1.10) и подготовим столбцы таблицы для расчета y и dy .

F29		fx					
	A	B	C	D	E	F	G
1		g=	9,81	м/с^2			
2		v0=	10	м/с			
3							
4	#Шаг	dt	t	dy	y		y
5	0	0	0	0	100		100

Рис. 1.10. Исходные данные и начальные условия

Введем также столбец с номером шага, где в строке с нулевым шагом будем задавать начальные условия для переменных t и y .

Зададим шаг dt , например, равный 0,1, и для упрощения будем держать его постоянным. В столбце t будем накапливать состояние этой переменной. Запишем в ячейку C6 формулу $=C5+B6$, где к каждому предыдущему состоянию будем добавлять шаг dt , тем самым накапливая все произведенные расчеты площадей аппроксимирующих фигур.

В столбце dy будем высчитывать приращение по формуле (1.14), как выражение $=-C\$1*C6*B6+C\$2*B6$, где в ячейке $C\$1$ находится ускорение свободного падения, в ячейке

Е6		fx		=E5+(D6+D5)/2	
	A	B	C	D	E
1		g=	9,81	м/с²	
2		v0=	10	м/с	
3					
4	#Ляра	dt	t	dy	y
5	0	0	0	0	100
6	1	0,1	0,1	0,9019	100,451
7	2	0,1	0,2	0,8038	101,3038
8	3	0,1	0,3	0,7057	102,0586
9	4	0,1	0,4	0,6076	102,7152
10	5	0,1	0,5	0,5095	103,2738
11	6	0,1	0,6	0,4114	103,7342
12	7	0,1	0,7	0,3133	104,0966
13	8	0,1	0,8	0,2152	104,3608
14	9	0,1	0,9	0,1171	104,527
15	10	0,1	1	0,019	104,595
16	11	0,1	1,1	-0,0791	104,565
17	12	0,1	1,2	-0,1772	104,4368
18	13	0,1	1,3	-0,2753	104,2106
19	14	0,1	1,4	-0,3734	103,8862
20	15	0,1	1,5	-0,4715	103,4638
21	16	0,1	1,6	-0,5696	102,9432
22	17	0,1	1,7	-0,6677	102,3246
23	18	0,1	1,8	-0,7658	101,6078
24	19	0,1	1,9	-0,8639	100,793
25	20	0,1	2	-0,962	99,88
26					

Рис. 1.11. Пример расчета с применением численного интегрирования

Необходимо пояснить, что используемый здесь метод трапеций по реализации расчета площади аппроксимирующей фигуры разделен на два этапа: на первом считаются площади четырехугольников, построенных с высотой левого и правого значения подынтегральной функции, а на втором этапе высчитывается их среднее значение. В итоге получается площадь трапеции. Такая реализация позволяет не пересматривать выражение (1.14), в котором уже присутствует перемножение на шаг интегрирования.

Теперь можно проверить правильность нашего решения и сравнить с уже известным, построенным по формуле (1.8) с такими же начальными условиями. Запишем в ячейке F5 вы-

\$C\$2 — начальная скорость. Эти ячейки закреплены, чтобы при растягивании формулы они оставались неизменными. Другие ссылки указывают на значения t и dt , полученные на данном шаге.

В столбце y будем накапливать значение как среднее суммы двух предыдущих рассчитанных значений dy и значение y , полученное на предыдущем шаге. Запишем выражение $=E5 + (D6 + D5)/2$. Этот метод численного интегрирования уже рассматривался в разделах 1.2.3 и 1.2.4.

Распространим введенные формулы и получим расчет, представленный на рис. 1.11.

ражение для расчета $=- \$C\$1 * C5^2 / 2 + \$C\$2 * C5 + \$E\5 и растянем его. Для наглядности можно построить точечную диаграмму, как представлено на рис. 1.12, где по оси ординат отложено значение переменной t , а по оси абсцисс — значение переменной y .

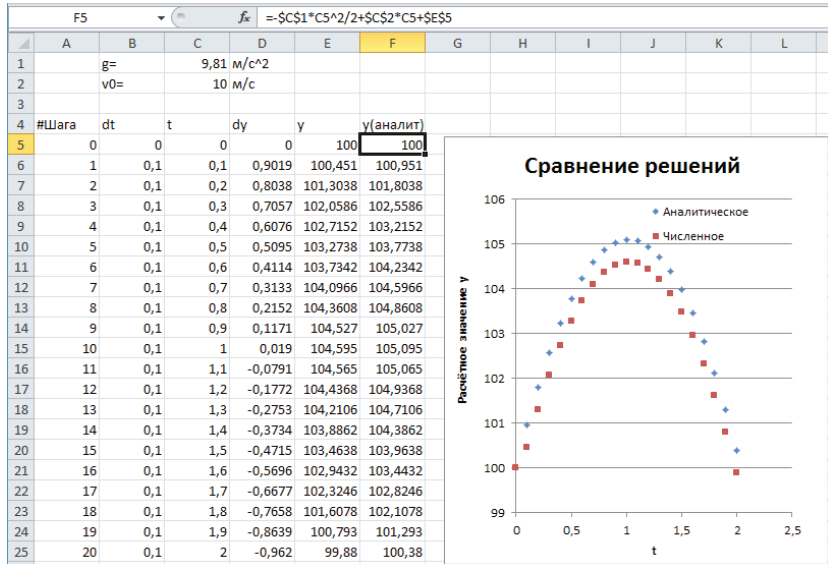


Рис. 1.12. Сравнение численного и аналитического решения

Такая пошаговая реализация позволяет рассматривать решение как развивающийся процесс, при котором некоторые переменные, входящие в его математическое описание, могут меняться с каждым шагом. При этом нет необходимости в сложных, а зачастую невыполнимых математических трансформациях.

Следует подчеркнуть, что существенным отличием представленной численной реализации от готового аналитического решения является именно его неопределенность до окончания расчета. Т.е. форма кривой будет шаг за шагом достраиваться

на основе значений, полученных на каждом предыдущем шаге. И только пройдя весь путь, можно будет анализировать полученный результат.

1.2.6. Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка в Excel

При решении дифференциальных уравнений второго порядка подход будет аналогичным. Однако необходимо понимать, что интегрирование должно проходить уже в два этапа.

Рассмотрим это на примере решения уравнения (1.1), которое представляет собой уже общее описание. Очевидно, что численное интегрирование таких уравнений непосредственно не представляется возможным, поскольку каждый раз необходимо производить интегрирование дважды. И для того чтобы задача стала решаемой, произведем следующие манипуляции: преобразуем уравнение второго порядка в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. По следующей схеме:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y, y_1), \\ \frac{dy}{dx} = y_1 = f_2(x, y, y_1). \end{cases} \quad (1.15)$$

где функция $f_2(x, y_1, y)$ вводится в систему формально для того, чтобы рассмотренные выше методы могли быть непосредственно реализованы.

Теперь произведем изменения уравнения (1.1) в соответствии со схемой (1.15), учитывая уже имеющиеся представления:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g, \\ \frac{dy}{dt} = v. \end{cases} \quad (1.16)$$

Видно, что фактически мы ввели дополнительную функцию, которая просто вырежется, как первый дифференциал. При этом очевидно, что первая производная по времени от расстояния является скоростью, поэтому обозначим ее как v . Теперь интегрирование можно производить численно: на первом этапе считается первый интеграл, а на втором — второй.

Для того чтобы посчитать численно, необходимо преобразовать эту систему так, как это было сделано в примере, где численно решалось дифференциальное уравнение первого порядка (1.14).

Соответственно перезапишем систему, приведя ее к нужному виду:

$$\begin{cases} dv = -gdt, \\ dy = vdt. \end{cases} \quad (1.17)$$

Теперь видно, что на первом этапе мы получаем численное значение такой функции, как скорость v из интегрирования первого уравнения, и уже на втором численно вычисляем значение y .

Произведем расчет в Excel и сравним с уже полученным выше аналитическим решением (1.8).

Запишем по аналогии с предыдущим решением начальные условия и определим область, в которой будем производить численное решение (рис. 1.13).

СУММ X ✓ fx =C2*B5							
	A	B	C	D	E	F	G
1		g=	9,81	м/с^2			
2		v0=	10	м/с			
3							
4	#Шара	dt	t	dv	v*dt	y	y(аналит)
5	0	0,1	0	0	=C2*B5	100,00	100,00

Рис. 1.13. Исходные данные и начальные условия

Как и в предыдущем примере, имеется столбец с номером шага, где в строке с нулевым шагом будем задавать начальные условия для переменных t и y . В то же время применение в решении начальной скорости v_0 реализовано через ее подстановку во второе уравнение, как абсолютное смещение функции y с учетом перемножения на dt , что видно на рис. 1.13.

Теперь в ячейке $D6$ запишем формулу для вычисления dv , как $=- \$C\$1*B6$, что соответствует первому уравнению из системы (1.17). Конечно, такая упрощенная реализация интегрирования методом прямоугольников может вносить большие погрешности, но в нашем случае это не является принципиальным, поскольку в выражение входит только единственная константа g , что уравнивает по точности рассмотренные ранее методы.

В то же время реализация упрощенным методом расчета второго уравнения уже будет вносить большие погрешности, поэтому реализуем расчет величины vdt методом трапеций. Для этого в ячейку $E6$ запишем формулу $=E5+ (D6+D5)/2*B6$. Расчет величины y произведем таким же способом, как и в предыдущем примере. В ячейку $F6$ запишем формулу $=F5+ (E6+E5)/2$. Распространив выражения на весь диапазон вычислений, получим данные, приведенные на рис. 1.14.

Теперь можно проверить правильность нашего решения и сравнить с уже известным решением, построенным по формуле (1.8) с такими же начальными условиями. Запишем в ячейке $G5$ выражение для расчета $=- \$C\$1*C5^2/2+ \$C\$2*C5+ \$E\5 и растянем его. А для наглядности построим точечную диаграмму, как представлено на рис. 1.15, где по оси ординат отложено значение переменной t , а по оси абсцисс — значение переменной y .

Приведенные примеры наипростейших реализаций не являются наиболее точными, однако показывают возможности численных методов. Более тщательный выбор методик и их реализация, нацеленная на снижение погрешности расчетов, ожидаемо будет давать существенно более точные значения.

E6		f _x		=E5+(D6+D5)/2*B6		
	A	B	C	D	E	F
1		g=	9,81	m/c^2		
2		v0=	10	m/c		
3						
4	#Шага	dt	t	dv	v*dt	y
5	0	0,1	0	0	1	100,00
6	1	0,1	0,1	-0,981	0,95095	100,98
7	2	0,1	0,2	-0,981	0,85285	101,88
8	3	0,1	0,3	-0,981	0,75475	102,68
9	4	0,1	0,4	-0,981	0,65665	103,39
10	5	0,1	0,5	-0,981	0,55855	103,99
11	6	0,1	0,6	-0,981	0,46045	104,50
12	7	0,1	0,7	-0,981	0,36235	104,92
13	8	0,1	0,8	-0,981	0,26425	105,23
14	9	0,1	0,9	-0,981	0,16615	105,44
15	10	0,1	1	-0,981	0,06805	105,56
16	11	0,1	1,1	-0,981	-0,03005	105,58
17	12	0,1	1,2	-0,981	-0,12815	105,50
18	13	0,1	1,3	-0,981	-0,22625	105,32
19	14	0,1	1,4	-0,981	-0,32435	105,05
20	15	0,1	1,5	-0,981	-0,42245	104,67
21	16	0,1	1,6	-0,981	-0,52055	104,20
22	17	0,1	1,7	-0,981	-0,61865	103,63
23	18	0,1	1,8	-0,981	-0,71675	102,97
24	19	0,1	1,9	-0,981	-0,81485	102,20
25	20	0,1	2	-0,981	-0,91295	101,34

Рис. 1.14. Пример расчета
с применением численного интегрирования

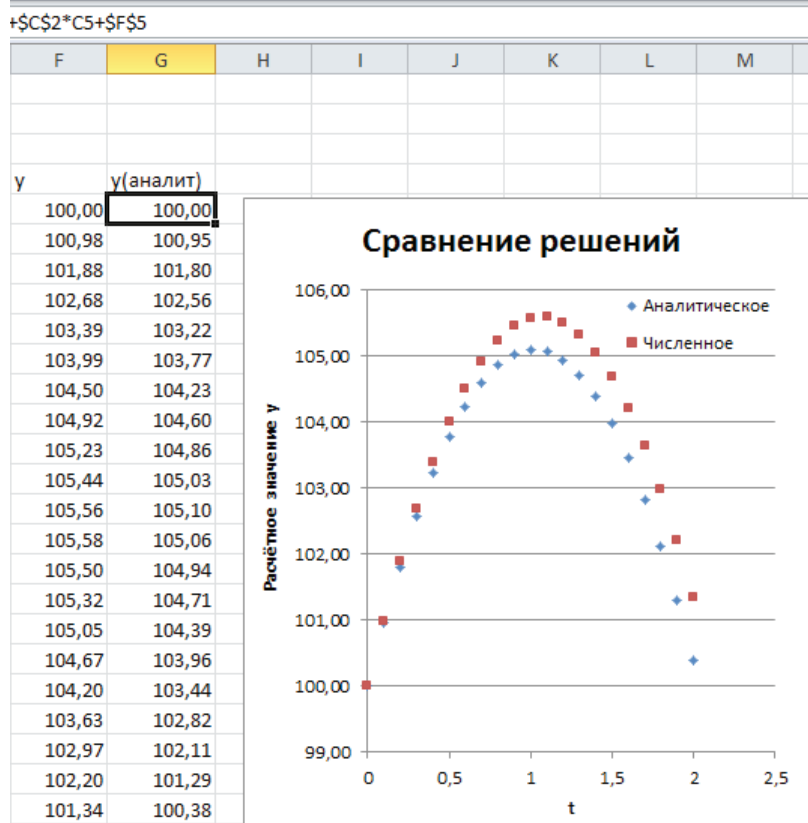


Рис. 1.15. Сравнение численного и аналитического решения

Альтернативным подходом при решении дифференциальных уравнений может быть метод конечных разностей, который подробно будет рассмотрен далее (раздел 2.2).

2. Практическое применение численного моделирования

Материаловедческие задачи зачастую не ограничиваются одним направлением, поэтому для решения различных задач требуются и соответствующие подходы. Использование моделирования для решения материаловедческих задач подразумевает как различные подходы, так и использование наиболее подходящих для решения конкретной задачи численных методов, позволяющих получить решение оптимальным способом.

Некоторые задачи могут быть настолько сложны, что создание модели и ее решение в общем виде может быть невозможно. При создании моделей следует не только создать непосредственно само математическое представление, но и выбрать оптимальный способ её численного решения. В пособии рассмотрены два подхода к созданию и решению математических моделей. Первый включает в себя поэтапное создание и развитие модельных представлений на основе законов физики, а второй подход представляет собой уже готовое математическое описание с заранее выбранным методом численного решения.

2.1. Построение и расчет модели процесса нагрева твердого тела на основе известных физических закономерностей

2.1.1. Базовые модельные представления

Для понимания описанных в разделе 1.1.2 принципов построения математических моделей рассмотрим создание мо-

дели процесса нагрева однородного твердого тела от внутренних источников тепла.

Несомненно, реальный процесс нагрева изделия в печи подчинен значительно более сложным закономерностям и может не соответствовать в полной мере предложенному описанию, нежели те, которые будут необходимы для построения данной модели. Однако первоочередной задачей моделирования является не точность реализации, а описание моделью основных закономерностей, характеризующих моделируемый процесс. Поэтому сосредоточимся на базовых представлениях о процессе нагрева и заранее введем следующие ограничения для упрощения построения модели.

Будем предполагать, что изделие, нагрев которого описывается в модели, конечно, имеет массу и некоторые геометрические характеристики, однако при моделировании мы будем рассматривать изделие как материальную точку с некоторым набором характеристик. Также условимся, что нагрев изделия происходит от внутренних источников, как, например, при прохождении электрического тока по проводнику.

Для построения модели необходимо рассмотреть непосредственно сам процесс нагрева и охлаждения, который можем наблюдать в реальной печи (рис. 2.1).

Процессы нагрева и охлаждения, как и многие другие процессы, в литературе называются «переходными», т.е. процессами, при которых происходит переход системы из одного стационарного состояния в новое стационарное состояние, обусловленное внешним воздействием.

В случае нагрева новое состояние системы уже будет включать подвод в систему энергии, которая учитывается в виде изменения ее температуры, как меры ее энергии.

Вернемся к рис. 2.1. Так, с начального с момента времени t_1 вся введенная в систему энергия идет на нагрев тела, что приводит к увеличению его температуры. Однако с ростом температуры возрастает и количество тепла, которое начинает уходить в окружающую среду — это очевидный процесс, который

мы наблюдаем, когда имеем дело с незамкнутыми системами. Теперь выделяющееся тепло частично расходуется на повышение температуры тела, и частично — в окружающую среду. Этот процесс отражается на графике как замедление процесса нагрева. Чем ближе равновесное состояние системы, тем меньше скорость нагрева. Со временем система выйдет на стационарный режим, когда подводимая энергия будет полностью расходоваться на поддержание температуры. Таким образом, после достижения $T = T_{уст}$ все выделившееся (подводимое) тепло отдается в окружающую среду и температура тела перестает увеличиваться.

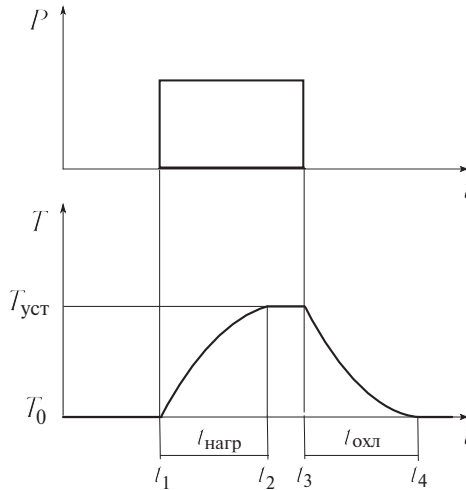


Рис. 2.1. Переходные процессы нагрева и охлаждения:

T — температура тела, T_0 — температура окружающей среды,
 P — мощность, переданная телу в текущий момент времени t

Для того чтобы описать математически этот процесс, воспользуемся базовыми знаниями по физике. Так, известно, что для того чтобы нагреть тело на температуру ΔT , необходимо количество теплоты $Q = Cm\Delta T$.

В случае процесса охлаждения используем закон Ньютона — Рíхмана — эмпирическая закономерность, выражающая тепловой поток между разными телами через температурный напор. Закон Ньютона — Рíхмана гласит, что количество теплоты Q , отданное через площадку на границе раздела тел площадью S за время t , пропорционально разности температур этих тел (если считать, что она остается за это время постоянной): $Q = \alpha S \Delta T t$, где α — функция процесса теплоотдачи, величина расчетная и определяемая экспериментально (известная как коэффициент теплопроводности $K_{\text{ТП}}$).

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение нагрева тела, следует рассмотреть его тепловой баланс.

Пусть внутри тела действует источник тепла постоянной мощности P . Введем следующие ограничения, которые позволяют упростить модель:

- температура тела в любой момент времени одинакова во всех точках объема тела, что вытекает из введенных нами постулатов, характеризующих тело как материальную точку;
- теплоемкость тела, выраженная коэффициентом C , не зависит от температуры;
- коэффициент теплоотдачи не зависит от температуры и одинаков по всей поверхности тела.

При этом за время dt энергия, генерируемая в теле, эквивалентная мощности P , будет расходоваться на повышение температуры тела, а часть ее — отдаваться в окружающую среду. Для упрощения записей введем односимвольные коэффициенты для этих процессов вида: $C = C_T m$ — полная теплоемкость, а $K = K_{\text{ТП}} S$ — теплоотдающая способность.

Необходимо отметить, что теплоотвод может осуществляться не только через физический контакт с более холодной поверхностью, но и через другие механизмы, например, через конвекцию, при непосредственном учете которой модель потребует-ся усложнить. Однако, если вспомнить, что оба эти процесса фактически различаются только коэффициентом теплоотдачи,

то можно сделать допущение, что введенный нами общий коэффициент K будет учитывать и этот механизм теплоотвода. Такой упрощенный подход будет соответствовать описанным ранее рекомендациям по составлению модели на начальном этапе моделирования. Поэтому исключим из рассмотрения и другой возможный процесс теплообмена — обмен лучистой энергией.

Теперь составляем уравнение на основе закона сохранения энергии:

$$Pdt = CdT + KTdt. \quad (2.1)$$

Такая запись может выглядеть некорректной, если не обозначить правила ее применения. Так, при поступлении в систему количества тепла, эквивалентного подводимой мощности P за промежуток времени, равный dt , система распределит его на непосредственное изменение своей внутренней энергии, выраженной как изменение температуры dT с учетом ее параметров, описываемых общим коэффициентом C . И отвод тепла в атмосферу, в соответствии с рассмотренным ранее описанием, зависит от разности температур между системой (телом) и атмосферой с учетом общего коэффициента K . При этом количество теплоты, ушедшее из системы, рассчитывается как тепловой поток за единицу времени, что обуславливает необходимость перемножения на время dt , в течение которого этот поток проходил аналогично подводимой энергии. В то же время значение температуры, использованное в описании перемещения теплового потока в атмосферу, должно представлять собой разность температур между телом и атмосферой, что требует отражения в модели. Но если задать точку отсчета температуры и, соответственно, значение комнатной температуры равными 0, то дополнительных действий для учета этой особенности процесса не потребуется. Это позволит не усложнять модель и упростит дальнейший расчет. Кроме того, условие также необходимо учесть при применении готовой модели к реальному эксперименту.

2.1.2. Аналитическое решение

Для дальнейшего анализа модели запишем уравнение процесса нагрева тела (2.1) в следующем виде:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{K}{C}T - \frac{P}{C} = 0. \quad (2.2)$$

Попробуем решить это дифференциальное уравнение аналитически. Если вспомнить схему, описывающую процесс нагрева (рис. 2.1), то можно выделить два состояния системы. Первое — это состояние изменения температуры как непосредственно процесс нагрева, и второе — это стационарное состояние, когда температура системы уже не изменяется. В такой записи уравнения модели (2.2) отношение приращения температуры системы ко времени является мгновенной скоростью нагрева. Поэтому разобьем решение уравнения (2.2) на несколько этапов. Сначала найдем его частное решение при условии, что скорость изменения температуры со временем dT/dt равна нулю. Это означает, что система имеет максимальную температуру, которую она может достичь при заданных условиях. Т.е. максимальную температуру нагрева $T_{\text{уст}}$ (рис 2.1). Получим для стационарного состояния следующее выражение относительно T , обозначив эту температуру T_1 , соответствующую первому частному решению:

$$T_1 = \frac{P}{K}. \quad (2.3)$$

На следующем этапе найдем общее решение дополнительного уравнения при условии, что $P = 0$ (режим охлаждения с максимальной температурой). Это позволит упростить запись уравнения (2.2), исключив из него соответствующий член. Перезапишем его в следующем виде, обозначив температуру T_2 :

$$\frac{dT_2}{dt} + \frac{K}{C} T_2 = 0. \quad (2.4)$$

Теперь можно разделить переменные, чтобы в дальнейшем его проинтегрировать:

$$\frac{dT_2}{T_2} = -\frac{K}{C} dt. \quad (2.5)$$

После преобразования получившееся решение будет содержать, с одной стороны, натуральный логарифм температуры, а с другой — отношение констант и постоянную интегрирования, которую обозначим как A . Чтобы исключить усложнение расчета при потенцировании решения, представим постоянную интегрирования как натуральный логарифм A . Так, после операции потенцирования решение примет следующий вид:

$$T_2 = Ae^{-\frac{K}{C}t}. \quad (2.6)$$

В итоге общее решение уравнения (2.2) будет суммой двух частных решений:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P}{K} + Ae^{-\frac{K}{C}t}. \quad (2.7)$$

Для того чтобы опередить значение неизвестной постоянной интегрирования, выберем такие условия, при которых она примет однозначный вид. Так, для определения постоянной A используем следующее условие, соответствующее начальному моменту времени, когда $t = 0$. Температура в этот момент должна быть нулевой, т. е. $T = 0$, что позволит вывести из рассмотрения эти величины. Подставив эти значения, получим:

$$0 = \frac{P}{K} + A,$$

и, соответственно,

$$A = -\frac{P}{K}. \quad (2.8)$$

Подставляя полученное выражение в (2.7) и вынося за скобки множитель, будем иметь следующую зависимость:

$$T = \frac{P}{K} \left(1 - e^{-\frac{K}{C}t} \right). \quad (2.9)$$

Проведем анализ полученного решения. Видно, что подводимая мощность выступает как множитель, который не должен быть нулевым. Т. е. данное решение будет справедливо только для условий нагрева и не применимо для условий охлаждения, поскольку при охлаждении подводимая мощность будет отсутствовать, сводя к нулю температуру вне зависимости от времени. Однако процесс нагрева данное решение будет описывать, как и ожидалось: в начальный этап он будет идти с определенной скоростью, а с возрастанием величины выражения в экспоненте ее влияние будет снижаться и со временем будет незначимым, тем самым выводя систему в стационарное состояние.

Далее для получения решения при охлаждении необходимо рассматривать систему с соответствующими начальными условиями. Очевидно, что система будет охлаждаться при условии, что ее температура будет превышать температуру окружающей среды. Тогда после отключения нагрева начнется охлаждение тела.

Так как энергия, подводимая к аппарату, равна нулю, то левая часть уравнения (2.1) также будет равна нулю и уравнение примет следующий вид:

$$0 = CdT + KTdt. \quad (2.10)$$

Преобразуем это выражение, разделив переменные, чтобы в дальнейшем произвести операцию интегрирования:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{K}{C} dt. \quad (2.11)$$

Очевидно, что получившееся уравнение полностью соответствует полученному ранее выражению (2.5), решение кото-

рого уже получено в виде выражения (2.6), где A — постоянная интегрирования. Чтобы определить ее значение, рассмотрим начальные условия в момент времени $t = 0$, соответствующие моменту начала процесса охлаждения. Этот момент обозначен как t_3 (рис. 2.1). Из рис. 2.1 видно, что в начальный момент времени система обладала заранее известной температурой, которую обозначим как T_0 . Тогда решение уравнения (2.6) примет следующий вид:

$$T_0 = Ae^{-\frac{K}{C}t}. \quad (2.12)$$

С учетом того, что в начальный момент времени $t = 0$, получим, что $A = T_0$. Соответственно, решение будет выглядеть следующим образом:

$$T = T_0 e^{-\frac{K}{C}t}. \quad (2.13)$$

Теперь, используя принцип аддитивности полученных частных решений, сложим выражения (2.9) и (2.13). И окончательно получаем уравнение процесса нагрева при отдаче тепла в окружающую среду по закону Ньютона:

$$T = T_0 e^{-\frac{K}{C}t} + \frac{P}{K} \left(1 - e^{-\frac{K}{C}t} \right), \quad (2.14)$$

где T_0 — начальная температура системы в момент времени t_0 . Причем это выражение справедливо и для случая нагрева, и для случая охлаждения с учетом заданных, соответствующих каждому процессу, начальных условий.

2.1.3. Численный расчет модели процесса нагрева твердого тела в Excel

Готовое, выведенное аналитически решение дифференциального уравнения модели, несомненно, представляет допол-

нительные возможности для исследователя. Однако далеко не всегда на практике такое решение возможно получить без значительных временных затрат. Поэтому рассмотрим возможности применения методов численного решения дифференциальных уравнений для данной модели и сравним полученные решения.

Произведем численный расчет модели (2.1) методом трапеций, который прост в реализации и дает приемлемую точность. Как описано ранее в разделе 1.2.5, необходимо ввести те параметры, которые задаются изначально, и создать рабочую область расчета для последовательного численного интегрирования. Для чего в ячейки с $B1$ по $B3$ введем начальные условия, а столбцы D , E и F будем использовать непосредственно для расчета (рис. 2.2). Также в первую строку этих колонок введем начальные условия для шага интегрирования по времени dt и начальную температуру T_0 .

F17		fx				
	A	B	C	D	E	F
1	P=	50		dt	dT	T
2	C=	5			1	0
3	K=	1				

Рис. 2.2. Пример рабочей области расчета модели с начальными условиями

Необходимо отметить, что предложенный пример расчета будет использовать постоянный шаг интегрирования, задаваемый в ячейке $C2$, однако расчет можно будет в дальнейшем скорректировать на любой шаг. Выбор значений постоянных P , C и K может также быть произвольным. Для корректного расчета с первого шага зададим их заранее, как и шаг интегрирования вместе с начальной температурой.

Далее, чтобы производить расчеты, необходимо преобразовать уравнение (2.1) так, чтобы с одной стороны остался диф-

ференциал по температуре, а с другой — остальное выражение и дифференциал по времени:

$$dT = \left(\frac{P - KT}{C} \right) dt. \quad (2.15)$$

Теперь реализуем расчет дифференциала температуры в ячейке *E2*. Введем выражение для первого шага расчета *dT* по методу прямоугольников, как $= (B1 - B3 * F2) / B2 * D2$ (рис. 2.3). Это позволит получить значение, необходимое для корректного расчета следующего шага по методу трапеций.

E2		fx =(B1-B3*F2)/B2*D2				
	A	B	C	D	E	F
1	P=	50		dt	dT	T
2	C=	5		1	10	0
3	K=	1				

Рис. 2.3. Пример рабочей области расчета модели на первом шаге расчета

Очевидно, что если мы будем растягивать дальше вниз расчет дифференциала температуры, шаг интегрирования и температуры, то расчетные значения будут некорректными. Поэтому внесем в строку следующего шага выражения таким образом, чтобы при растягивании расчета вниз он был корректным без лишних манипуляций. Для этого добавим в столбец *dt* в ячейку *D3* ссылку на начальное значение $=D2$. В ячейку текущего шага *F3* внесем выражение $=F2 + E2$ для суммирования рассчитанных на предыдущем шаге значений приращения температуры и температуры. И остается внести в ячейку *E3* выражение для расчета приращения температуры по методу трапеций $=CP3НАЧ ((\$B\$1 - \$B\$3 * F3) / \$B\$2 * D3; E2)$, как показано на рис. 2.4. При этом в выражении закрепим ячейки со ссылками на постоянные (*P*, *C* и *K*), которые не должны изменяться при дальнейшем расширении расчета, оставим незакрепленными ссылки на текущую расчетную температуру и шаг интегрирования.

СУММ fx =CPЗНАЧ(((\$B\$1-\$B\$3*F3)/\$B\$2*D3;E2)								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P=	50		dt	dT	T		
2	C=	5			1	10	0	
3	K=	1			1	=CPЗНАЧ(((\$B\$1-\$B\$3*F3)/\$B\$2*D3;E2)		
4						CPЗНАЧ(число1; [число2]; [число3]; ...)		

Рис. 2.4. Пример рабочей области расчета модели на следующем шаге расчета

Теперь, выделив одновременно ячейки $D3$, $E3$ и $F3$, можно расширить расчет на нужное количество шагов (рис. 2.5).

G24 fx						
	A	B	C	D	E	F
1	P=	50		dt	dT	T
2	C=	5			1	10
3	K=	1			1	9
4					1	7,6
5					1	6,14
6					1	4,796
7					1	3,6444
8					1	2,70416
9					1	1,963624
10					1	1,3969936
11					1	0,973979
12					1	0,6650739
13					1	0,4441139
14					1	0,2892225
15					1	0,1828546
16					1	0,1113851
17					1	0,0645119
18					1	0,0346241
19					1	0,0162178
20					1	0,0053929
21					1	-0,000559

Рис. 2.5. Пример рабочей области расчета модели. Заключительная стадия расчета

Для того чтобы понять, насколько корректно произведен расчет, добавим построение решения, рассчитанного аналитически. Поскольку расчет может включать не только нагрев, но и охлаждение, возьмем для сравнения полное решение (2.14), учитывающее оба процесса. Добавим необходимые столбцы для расчета течения времени, т. е. значений по оси абсцисс, и расчета непосредственно температуры (рис. 2.6). Далее в ячейку G2 внесем начальные значения времени и температуры, запишем выражение для расчета температуры $=F\$2*EXP(-\$B\$3/\$B\$2*G2)+\$B\$1/\$B\$3*(1-EXP(-\$B\$3/\$B\$2*G2))$.

H2		fx =F\$2*EXP(-\$B\$3/\$B\$2*G2)+\$B\$1/\$B\$3*(1-EXP(-\$B\$3/\$B\$2*G2))						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P=	50		dt	dT	T	t	T(Ан.)
2	C=	5		1	10	0	0	0
3	K=	1		1	9	10		
4				1	7,6	19		
5				1	6,14	26,6		
6				1	4,796	32,74		
7				1	3,6444	37,536		
8				1	2,70416	41,1804		
9				1	1,963624	43,88456		
10				1	1,3969936	45,84818		
11				1	0,973979	47,24518		
12				1	0,6650739	48,21916		
13				1	0,4441139	48,88423		
14				1	0,2892225	49,32834		
15				1	0,1828546	49,61757		
16				1	0,1113851	49,80042		
17				1	0,0645119	49,91181		
18				1	0,0346241	49,97632		
19				1	0,0162178	50,01094		
20				1	0,0053929	50,02716		

Рис. 2.6. Пример рабочей области промежуточной стадии сравнения численного и аналитического решений модели

Однако этого недостаточно, чтобы при растягивании аналитическое решение строилось корректно, поскольку в столбце t

нет формулы для расчета времени, прошедшего с начала расчета. Поэтому в ячейку G3 внесем выражение для накопления времени $=D3+G2$, растягивая которую вниз будем получать накопившееся время с начала расчета. Теперь распространим расчет времени и значения температуры на весь диапазон и получим результаты для сравнения (рис. 2.7).

	I26			f_x				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P=	50		dt	dT	T	t	T(Ан.)
2	C=	5		1	10	0	0	0
3	K=	1		1	9	10	1	9,063462
4				1	7,6	19	2	16,484
5				1	6,14	26,6	3	22,55942
6				1	4,796	32,74	4	27,53355
7				1	3,6444	37,536	5	31,60603
8				1	2,70416	41,1804	6	34,94029
9				1	1,963624	43,88456	7	37,67015
10				1	1,3969936	45,84818	8	39,90517
11				1	0,973979	47,24518	9	41,73506
12				1	0,6650739	48,21916	10	43,23324
13				1	0,4441139	48,88423	11	44,45984
14				1	0,2892225	49,32834	12	45,4641
15				1	0,1828546	49,61757	13	46,28632
16				1	0,1113851	49,80042	14	46,9595
17				1	0,0645119	49,91181	15	47,51065
18				1	0,0346241	49,97632	16	47,96189
19				1	0,0162178	50,01094	17	48,33134
20				1	0,0053929	50,02716	18	48,63381

Рис. 2.7. Пример рабочей области заключительной стадии сравнения численного и аналитического решений модели

Для того чтобы придать сравнению больше наглядности, построим точечную диаграмму, где по оси абсцисс отложим время t (столбец G), а по оси ординат отложим численное решение T (столбец F) и аналитическое T (Ан.) — столбец H (рис. 2.8).

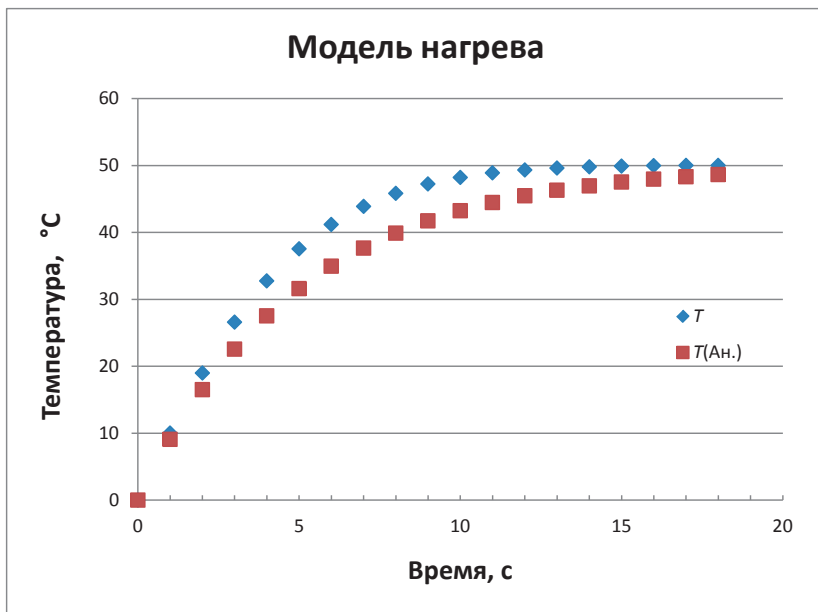


Рис. 2.8. Сравнение численного и аналитического решений модели

Заметное различие обусловлено, в первую очередь, довольно крупным шагом интегрирования, и при его уменьшении кривые будут сближаться. Однако чрезмерное уменьшение шага интегрирования может серьезно замедлить расчет и его визуализацию без существенного повышения точности. Поэтому при выборе шага интегрирования следует понимать, какие цели ставятся при расчете модели. Это могут быть максимальная точность, когда неудобства огромного набора данных будут оправданы, или простота и быстрота расчета.

После выбора оптимального шага интегрирования следует проанализировать поведение модели в разных условиях. Так, рассмотренная реализация может описывать процесс нагрева, тогда как аналитическое решение позволяет описать и охлаждение. Чтобы проверить, работает ли реализованный рас-

чет при условиях, когда изделие должно охлаждаться, изменим начальные условия так, чтобы подаваемая мощность $P = 0$, а начальная температура была не нулевой, например, равнялась 200. Для чего в ячейку $B1$ запишем 0, а в ячейку $F2$ внесем число 200. В результате получим кривую охлаждения как для численного метода расчета, так и для аналитического решения (рис. 2.9).

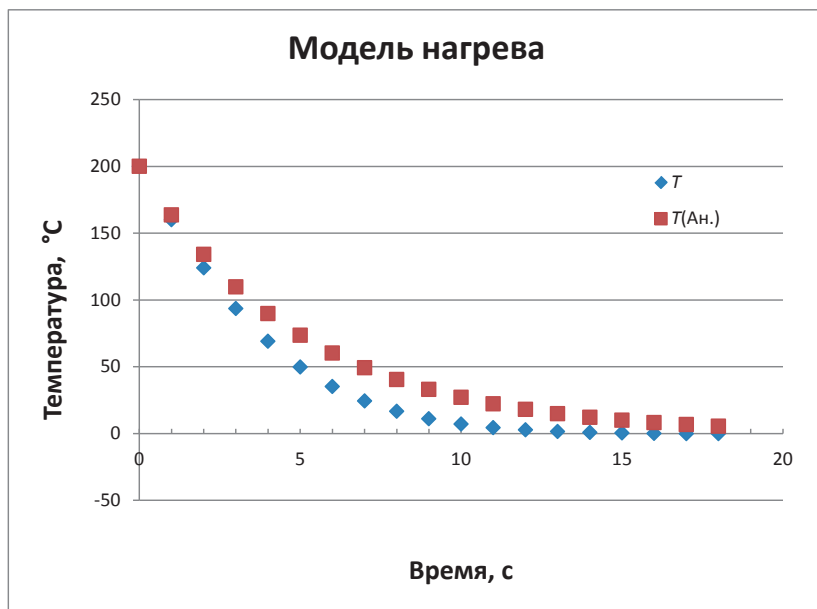


Рис. 2.9. Сравнение численного и аналитического решений модели в условиях охлаждения

Очевидно, что решение подходит и для охлаждения. Это позволит, развивая в дальнейшем расчет, моделировать не просто режим нагрева и охлаждения, а например, путем установки значения различных значений для мощности, по определенному алгоритму в соответствующие моменты расчета, моделировать

работу регулятора температуры печи, что позволит еще больше приблизить модель к реальному объекту, такому как лабораторная печь.

2.1.4. Учет инерции системы в модели нагрева

Рассмотренный в подразделе 2.1.1 пример переходного процесса, такого как нагрев или охлаждение, содержит довольно существенные допущения, которые могут препятствовать сближению модельных расчетов с наблюдаемым поведением реального объекта, такого как лабораторная печь. В первую очередь, это допущение говорит о том, что объект, даже разогреваясь от внутренних источников при подаче мощности, представляет собой материальную точку, в которой все процессы происходят мгновенно без учета реальной массы тела. Оно значительно отдаляет модель от реальности, т. к. чем массивнее изделие, тем дольше будет происходить его нагрев и тем более сложной будет конфигурация температурных полей внутри объема изделия. Однако расчет температурных полей внутри изделия не является простым даже для специально созданных для этого программных комплексов.

Несомненно, использование табличных процессоров для решения подобных задач не является продуктивным. В то же время возможности математического моделирования позволяют учитывать сложные закономерности, наблюдаемые в реальных объектах, путем их упрощения.

Обратимся к записанным данным при нагреве реального образца в лабораторной печи (рис. 2.10), где производилась фиксация показаний термопары непосредственно от изделия с пересчетом в реальную температуру, чтобы понять, как можно реализовать в модели особенности нагрева реального изделия в печи. Необходимо отметить, что изделие хоть и имеет массу, но она значительно меньше массы самой лабораторной печи,

обеспечивающей адекватный массе изделия переток тепла. Это позволяет утверждать, что изделие прогревалось равномерно и градиент температуры внутри самого изделия можно считать не существенным.

Эксперимент проходил следующим образом: изделие помещалось в печь, которую включали на фиксированную мощность, и производился разогрев печи и изделия.

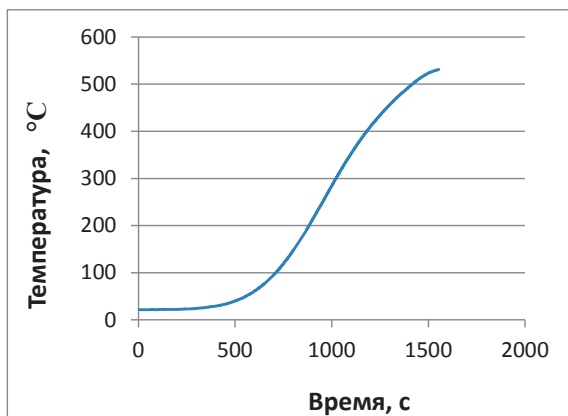


Рис. 2.10. Изменение температуры изделия при отжиге в лабораторной печи

Видно, что на начальной стадии отжига изделие в печи нагревается заметно медленнее. Это можно объяснить тем, что подаваемая мощность расходовалась не только на нагрев изделия непосредственно, но и преимущественно на нагрев самой печи, которая обладает значительно большей массой и, соответственно, теплоемкостью, чем изделие. Особенно это заметно на первых минутах процесса. Затем, когда печь перестает потреблять на свой разогрев значительное количество тепла, скорость нагрева изделия начинает возрастать и в дальнейшем поведение системы становится близким к модели, описанной в предыдущих разделах.

В то же время при прекращении подачи мощности печь может по инерции продолжать разогревать изделие еще некоторое время, и только по истечении этого периода времени уже будет заметно понижение температуры изделия. Таким образом, проявляется инертность системы, не учитываемая в описанной ранее модели.

Таким образом, инертность системы проявляется как изменение скорости нагрева, что является ускорением. При этом в начале процесса нагрева скорость должна быть низкой. Далее с течением времени она должна возрастать и впоследствии приближаться к некоторому значению. В случае охлаждения должен наблюдаться обратный процесс.

Такое описание очень схоже с описанием процесса нагрева. Поэтому реализуем его в модели аналогичным образом. Для чего в уравнении модели (2.2) необходимо изменить отношение, описывающее скорость, на выражение для ускорения. Однако этого недостаточно, чтобы математически описать нужное нам поведение скорости. Поэтому, взяв за основу преобразованное выражение (2.15), заменим дифференциал по температуре на дифференциал функции, в которой и опишем необходимое нам поведение скорости в зависимости от параметров системы:

$$\begin{cases} dU = \left(\frac{P - KT}{C} \right) dt, \\ dT = (U - LT) dt \end{cases} \quad (2.16)$$

где U — введенная функция, описывающая изменение скорости от времени, а L — дополнительно введенный параметр, позволяющий увидеть, насколько будет значимым это изменение в зависимости от температуры системы.

Несомненно, приведенное описание не будет являться исчерпывающим, может впоследствии также быть дополнено и уточнено.

2.1.5. Численный расчет модели процесса нагрева твердого тела с учетом инерции системы в Excel

Ожидаемо, что расширение модели до системы уравнений (2.16) также усложнит и поиск решения. Поэтому наиболее целесообразным представляется численное решение.

Воспользуемся рекомендациями, описанными в подразделах 1.2.6 и 2.1.3. Видно, что выражение (2.16) соответствует описанным ранее методикам и позволяет, последовательно интегрируя выражения, находить значение искомой величины T . Поэтому можно приступить к реализации расчета непосредственно в табличном процессоре.

Как описано ранее, начнем с ввода параметров, которые задаются изначально и необходимы для расчета последовательного применения численного интегрирования. Поэтому в ячейки с $B1$ по $B4$ введем начальные условия для величин P , C , K и L , а столбцы с D до H будем использовать непосредственно для расчета (2.16). Далее, как и в предыдущих расчетах, в первую строку этих колонок введем начальные условия для шага интегрирования по времени dt и начальную температуру T_0 . Также необходимо ввести начальное значение функции U , полагая, что в начальный момент времени она тоже была нулевой (рис. 2.11).


E28  fx								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P=	50		dt	dU	U	dT	T
2	C=	5		1		0		0
3	K=	1						
4	L=	0,25						

Рис. 2.11. Пример рабочей области расчета модели с учетом инерции системы с начальными условиями

Теперь реализуем расчет дифференциала dU системы уравнений (2.16) в ячейке $E2$. Введем выражение для первого шага по методу прямоугольников аналогично рассмотренным ранее примерам, как $= (B1-B3*H2)/B2*D2$. Это позволит получить значение, необходимое для корректного расчета следующего шага по методу трапеций. Также по методу прямоугольников в ячейке $G2$ рассчитаем дифференциал температуры, как $= (F2-B4*H2)*D2$ (рис. 2.12).

СУММ X ✓ fx =(F2-B4*H2)*D2								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P=	50		dt	dU	U	dT	T
2	C=	5		1	10	0	=(F2-B4*H2)*D2	
3	K=	1						
4	L=	0,25						

Рис. 2.12. Пример рабочей области расчета модели с учетом инерции системы на первом шаге расчета

Теперь можно реализовать следующий шаг таким образом, чтобы при растягивании расчета вниз он производился корректно. Для dt добавим в ячейку $D3$ ссылку на начальное значение $=D2$. Далее в ячейку $E3$ текущего шага внесем выражение для расчета приращения dU по методу трапеций $=CP3НАЧ ((B\$1-B\$3*F3)/B\$2*D3; E2)$. В ячейку $F3$ внесем выражение $=F2+E2$ для суммирования рассчитанных значений приращения текущего значения величины U . Потом в ячейку $G3$ добавим выражение для расчета приращения температуры по методу трапеций $=CP3НАЧ ((F3-B\$4*H3)*D3; G2)$. При этом в выражениях необходимо закрепить ссылки на постоянные (P , C , L и K), которые не должны изменяться при дальнейшем расширении расчета, оставив незакрепленным ссылки на текущие расчетные значения других величин (рис. 2.13).

E3		fx		=CP3НАЧ(((\$B\$1-\$B\$3*F3)/\$B\$2*D3;E2)				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	P=	50		dt	dU	U	dT	T
2	C=	5		1	10	0	0	0
3	K=	1		1	9	10	5	0
4	L=	0,25						

Рис. 2.13. Пример рабочей области расчета модели с учетом инерции системы на следующем шаге расчета

Теперь, выделив одновременно ячейки диапазона $D3:H3$, можно расширить расчет на нужное количество шагов. Однако, чтобы в дальнейшем визуализировать расчет, добавим в столбце I расчет абсолютного значения времени, записав в ячейку $I2$ начальное значение равное нулю. А в ячейку $I3$ запишем выражение $=D3+I2$ для накопления абсолютного значения времени и, выделив диапазон ячеек $D3:I3$, распространим расчет вниз (рис. 2.14).

J30		fx							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	P=	50		dt	dU	U	dT	T	t
2	C=	5		1	10	0	0	0	0
3	K=	1		1	9	10	5	0	1
4	L=	0,25		1	7,6	19	11,375	5	2
5				1	6,14	26,6	16,94063	16,375	3
6				1	4,796	32,74	20,67586	33,31563	4
7				1	3,6444	37,536	22,35699	53,99148	5
8				1	2,70416	41,1804	22,22514	76,34848	6
9				1	1,963624	43,88456	20,73315	98,57362	7
10				1	1,3969936	45,84818	18,37732	119,3068	8
11				1	0,973979	47,24518	15,60074	137,6841	9
12				1	0,6650739	48,21916	12,74934	153,2848	10
13				1	0,4441139	48,88423	10,06252	166,0342	11
14				1	0,2892225	49,32834	7,683345	176,0967	12
15				1	0,1828546	49,61757	5,677953	183,78	13
16				1	0,1113851	49,80042	4,056939	189,458	14
17				1	0,0645119	49,91181	2,795008	193,5149	15
18				1	0,0346241	49,97632	1,846922	196,3099	16
19				1	0,0162178	50,01094	1,159326	198,1569	17
20				1	0,0053929	50,02716	0,678721	199,3162	18

Рис. 2.14. Пример рабочей области заключительного расчета модели с учетом инерции системы

Для наглядности визуализируем решение: построим точечную диаграмму, где по оси абсцисс отложим время t (столбец I), а по оси ординат отложим численное решение T (столбец H) (рис. 2.15).

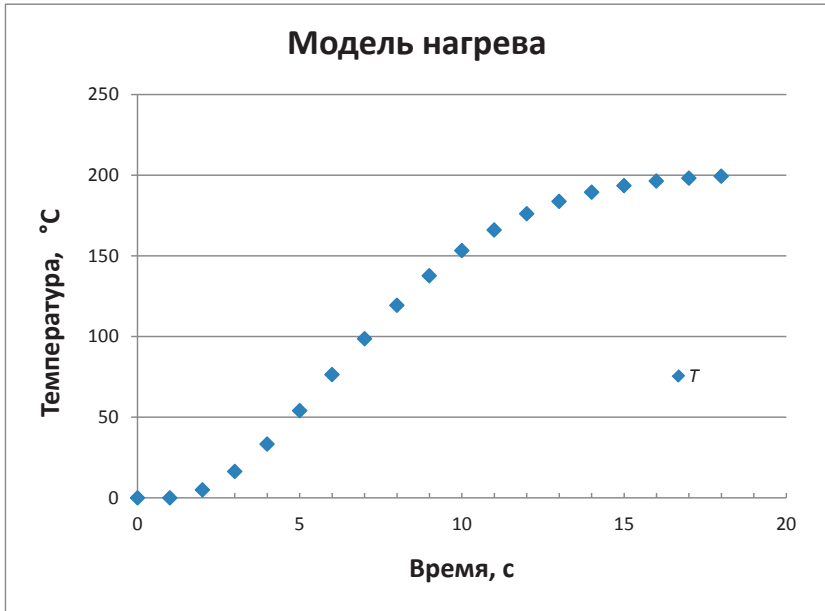


Рис. 2.15. Графическое представление результатов расчета модели с учетом инерции системы

Сходство результатов расчета (рис. 2.15) с данными реального эксперимента (рис. 2.9) очевидно. Таким образом, проведенное нами уточнение модели, введенное из общих соображений и наблюдений за реальным экспериментом, позволило без значительного усложнения модели получить результат, повторяющий поведение реального процесса.

2.1.6. Функциональное моделирование.

Реализация модели двухдиапазонного регулятора температуры в Excel

Разработка и реализация модели непосредственно самого явления или технологического процесса уже во многом является достижением, позволяющим вывести их изучение на новый до этого недостижимый уровень. Однако в практических задачах исследователи и инженеры имеют дело не непосредственно с процессом как таковым, а с методикой, технологической картой, каким-либо прибором или установкой, где и наблюдается это явление или реализован технологический процесс. Все это накладывает свои ограничения или ставит условия для наблюдения явления или протекания того или иного технологического процесса. Например, наблюдение за процессом нагрева в лабораторной печи обуславливает не только констатацию факта изменения температуры со временем, но и учет заложенных в печь ее разработчиком возможностей по реализации нагрева как ускоренного, так и с заданной скоростью, а также возможность поддержания температуры. За что отвечает управляющий контроллер, поведение которого в описанных выше моделях никак не учитывается.

В то же время возможность реализации подобных алгоритмов работы приборов или установок позволило бы полностью виртуализировать, например, не только непосредственно сам описанный выше процесс нагрева, но и моделировать различные режимы работы лабораторной печи, позволяя, не проводя экспериментов, точно знать, как будет изменяться температура изделия со временем при воплощении различных технологических операций.

Описанные возможности дает так называемое функциональное моделирование. В соответствии с описанием задач, которые решает такой вид моделирования, введем его опре-

деление: моделирование, при котором реализуется функциональное подобие, называют кибернетическим или функциональным. Функциональное моделирование — это не что иное, как раз моделирование каких-либо алгоритмов работы приборов или установок.

Для понимания этого вида математического моделирования рассмотрим пример реализации модели регулятора лабораторной печи.

Существует большое количество возможных реализаций алгоритмов поддержания или регулирования температуры (дополнительная информация по алгоритмам регулирования дана в Прил. 2), однако в большинстве лабораторных печей реализован наипростейший вид регулирования — двухдиапазонный или, по-другому, on/off регулятор.

Алгоритм его работы очень простой: задается необходимая температура; запускается нагрев, который, пока не достигнута температура, будет работать на полную мощность; при достижении заданной температуры идет процесс ее поддержания (он прост: если температура изделия превышает заданную температуру, то нагрев отключен, а при падении температуры изделия ниже заданной включается нагрев, который в дальнейшем будет отключен при ее достижении и т. д.).

Реализуем этот алгоритм на основе разработанной в подразделе 2.1.5 модели. Для этого необходимо добавить температуру так называемой установки — заданная температура нагрева, при достижении которой начнется процесс ее поддержания. Для этого значение T_{\max} поместим в ячейку B5, а также отведем свободный столбец C для целей указания того, какая в данный момент времени подается мощность (рис. 2.16). При этом текущая мощность как раз и будет определяться в соответствии с описанным выше алгоритмом работы регулятора. Также введем начальные условия для реализации модели.

	G23 fx								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	P=	100	dP	dt	dU	U	dT	T	t
2	C=	5		1	0	0	0	0	0
3	K=	0,3							
4	L=	0,5							
5	Tmax=	250							

Рис. 2.16. Пример рабочей области расчета модели нагрева с учетом алгоритма регулирования заданной температуры

Далее необходимо задать выражение для реализации алгоритма работы регулятора. Для этого в ячейке *C2* введем выражение `=ЕСЛИ (H2<B5;B1;0)`, как показано на рис. 2.17. Это выражение будет подставлять в ячейке результат сравнения в виде значений мощности. Если текущая температура меньше заданной T_{\max} , то в ячейку будет подставлено значение P из ячейки *B1*, а если больше, то будет подставлен ноль, т. е. печка в данный момент греть не должна.

	СУММ fx =ЕСЛИ(H2<\$B\$5;\$B\$1;0)								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	P=	100	dP	dt	dU	U	dT	T	t
2	C=	5	=ЕСЛИ(H2<\$B\$5;\$B\$1;0)				0	0	0
3	K=	0,3	ЕСЛИ(лог_выражение; [значение_если_истина]; [значение_если_ложь])						
4	L=	0,5							
5	Tmax=	250							

Рис. 2.17. Пример рабочей области расчета модели нагрева с учетом алгоритма регулирования заданной температуры.
Реализация алгоритма работы регулятора

Это еще не все изменения, которые необходимо внести в предыдущую реализацию, поскольку в выражении для расчета использовалась ссылка на конкретное значение температуры во время всего расчета — ячейку *B1*. Теперь для каждого момента времени расчет должен учитывать текущее значение

мощности, которое выставил регулятор, т.е. ссылаться на текущую ячейку из столбца *C*. Для этого в ячейку *E2* введем следующую формулу $= (C2 - B3 * H2) / B2 * D2$, которая как раз и будет учитывать именно текущее значение мощности (рис. 2.18).

СУММ ✕ ✓ f_x $= (C2 - B3 * H2) / B2 * D2$									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	P=	100	dP	dt	dU	U	dT	T	t
2	C=	5	100	1	$= (C2 - B3 * H2) / B2 * D2$			0	0
3	K=	0,3							
4	L=	0,5							
5	Tmax=	250							

Рис. 2.18. Пример рабочей области расчета модели нагрева с учетом алгоритма регулирования заданной температуры.

Учет алгоритма работы регулятора в расчете модели

Однако это расчет только значения для начального шага. Поэтому в ячейку *E3* введем выражение для расчета значения дифференциала по методу трапеций, как $= \text{CPЗНАЧ} ((C3 - B\$3 * F3) / B\$2 * D3; E2)$ (рис. 2.19). Все остальные выражения будут такими же, как описано в предыдущем разделе.

СУММ ✕ ✓ f_x $= \text{CPЗНАЧ} ((C3 - B\$3 * F3) / B\$2 * D3; E2)$									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	P=	100	dP	dt	dU	U	dT	T	t
2	C=	5	100	1	20	0	0	0	0
3	K=	0,3	100	1	$= \text{CPЗНАЧ} ((C3 - B\$3 * F3) / B\$2 * D3; E2)$				1
4	L=	0,5							
5	Tmax=	250							

Рис. 2.19. Пример рабочей области расчета модели нагрева с учетом алгоритма регулирования заданной температуры.

Учет алгоритма работы регулятора в расчете модели на следующем шаге

Это значит, что для *dt* необходимо добавить в ячейку *D3* ссылку на начальное значение $= D2$. Далее в ячейку *E3* текущего шага нужно внести выражение для расчета приращения *dU* по методу

трапеций =СРЗНАЧ (($B\$1-B\$3 \cdot F3$)/ $B\$2 \cdot D3$; $E2$). В ячейку $F3$ внесем выражение = $F2+E2$ для суммирования рассчитанных значений приращения текущего значения величины U . Потом в ячейку $G3$ добавим выражение для расчета приращения температуры по методу трапеций =СРЗНАЧ (($F3-B\$4 \cdot H3$)* $D3$; $G2$). И растянем расчет вниз, чтобы рассчитать значения модели как развитие процесса во времени (рис. 2.20).

K33 ▼ fx									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	P=	100	dP	dt	dU	U	dT	T	t
2	C=	5	100	1	20	0	0	0	0
3	K=	0,3	100	1	19,4	20	10	0	1
4	L=	0,5	100	1	18,518	39,4	22,2	10	2
5	Tmax=	250	100	1	17,52146	57,918	32,009	32,2	3
6			100	1	16,497546	75,43946	37,67198	64,209	4
7			100	1	15,490663	91,93701	39,33425	101,881	5
8			100	1	14,522501	107,4277	38,07715	141,2152	6
9			100	1	13,602746	121,9502	35,19057	179,2924	7
10			100	1	12,734785	135,5529	31,751	214,4829	8
11			100	1	11,918762	148,2877	28,46087	246,234	9
12			0	1	1,1531869	160,2065	25,65996	274,6948	10
13			0	1	-4,264196	161,3596	18,42111	300,3548	11
14			0	1	-6,844962	157,0955	8,064311	318,7759	12
15			0	1	-7,929996	150,2505	-2,55265	326,8402	13
16			0	1	-8,234613	142,3205	-11,188	324,2875	14
17			0	1	-8,139883	134,0859	-16,8259	313,0996	15
18			0	1	-7,848321	125,946	-19,5084	296,2737	16
19			0	1	-7,467091	118,0977	-19,8967	276,7653	17
20			0	1	-7,052463	110,6306	-18,8502	256,8686	18
21			100	1	3,3664246	103,5781	-17,1406	238,0184	19
22			100	1	8,4748758	106,9445	-10,3175	220,8778	20
23			100	1	10,774855	115,4194	-0,0891	210,5603	21
24			100	1	11,601599	126,1943	10,43479	210,4712	22
25			100	1	11,666923	137,7959	18,88884	220,906	23
26			100	1	11,349577	149,4628	24,22712	239,7948	24
27			0	1	0,8504173	160,8124	26,51426	264,0219	25

Рис. 2.20. Общий вид рабочей области расчета модели нагрева с учетом алгоритма регулирования заданной температуры

Видно, что при достижении заданной температуры T_{\max} происходит обнуление подаваемой мощности, а при снижении температуры ниже установленной мощность возвращается к своему начальному значению. Графически это выглядит следующим образом (рис. 2.21).

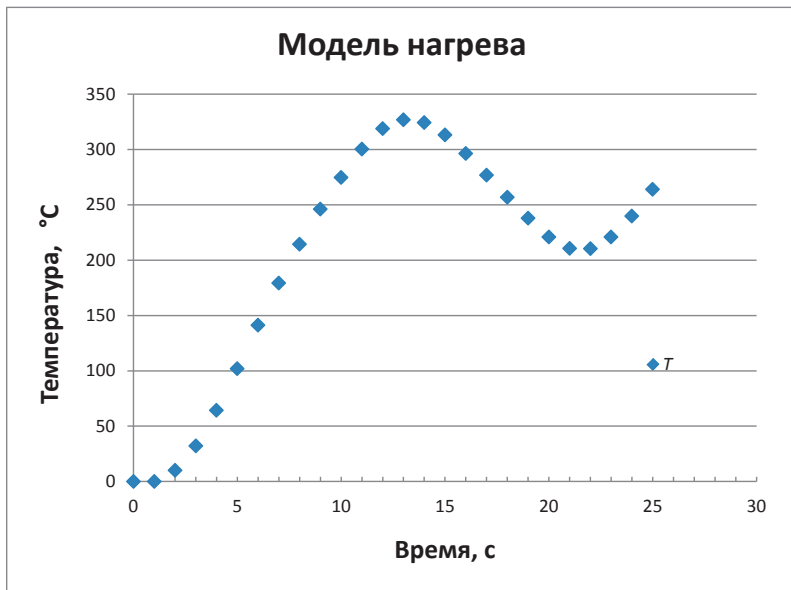


Рис. 2.21. Графическое представление результатов расчета модели с регулировкой температуры системы двухдиапазонным регулятором

Таким образом, совмещение двух подходов в математическом моделировании позволяет описать не только какой-либо процесс или явление, но и работу оборудования в целом или даже весь технологический цикл производства изделия. Это дает возможность контролировать производственные процессы на новом, ранее недостижимом уровне, позволяя повышать качество производимых изделий или точность воспроизведения технологических операций.

2.2. Метод конечных разностей

для решения нестационарных задач теплопроводности

2.2.1. Метод конечных разностей

Метод конечных разностей — численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных функций разностными схемами или шаблонами. Шаблоны — это множество точек, с помощью которых аппроксимируются производные. Является сеточным методом.

Для решения краевой задачи методом конечных разностей на расчетной области (L) строится сетка (рис. 2.22). Искомая непрерывная функция $y = f(x)$ заменяется дискретной $f(i)$, значения которой рассчитываются в узлах сетки i . В соответствии с определением производной функции по одной $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (2.17)$$

аппроксимируется первая производная функции — выбирается разностная схема

- правая:

$$f'(i) \approx \frac{\Delta f(i)}{\Delta x} = \frac{f(i+1) - f(i)}{\Delta x}; \quad (2.18)$$

- левая:

$$f'(i) \approx \frac{\Delta f(i)}{\Delta x} = \frac{f(i) - f(i-1)}{\Delta x}; \quad (2.19)$$

- или центральная:

$$f'(i) \approx \frac{\Delta f(i)}{\Delta x} = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2\Delta x}. \quad (2.20)$$

Также в узлах сетки может быть аппроксимирована вторая производная функции $f''(x)$:

$$\begin{aligned}
 f''(i) &\approx \frac{\Delta \left(\frac{\Delta f(i)}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = \left(\frac{f(i+1) - f(i)}{\Delta x} - \frac{f(i) - f(i-1)}{\Delta x} \right) \frac{1}{\Delta x} = \\
 &= \frac{f(i+1) - 2f(i) + f(i-1))}{\Delta x^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

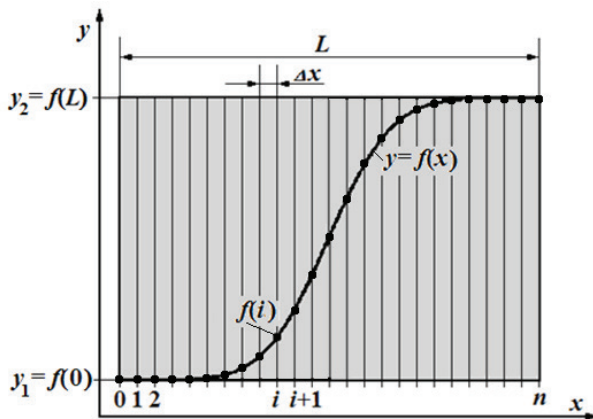


Рис. 2.22. Сетка к построению конечно-разностной схемы для решения краевой задачи

С учетом конечно-разностного представления производных для каждого узла сетки записывается разностное уравнение (аналог исходного уравнения, но с использованием разностной схемы), затем производится учет краевых условий (для краевых условий второго и третьего рода также строится некоторая разностная схема). Получается система линейных алгебраических уравнений, решая которую в ответе получают приближенные значения решения в узлах. Главной проблемой метода является построение правильной разностной схемы, которая будет сходиться к решению. Построение схемы выполняется исходя из свойств исходного дифференциального оператора.

Решение задач методом конечных разностей, когда процесс изменяется во времени (нестационарные задачи теплопроводности), представляет собой итерационный процесс — на каждой итерации находится решение на новом временном слое. Для решения таких задач используются явные, неявные и предиктор-корректор схемы. Последняя представляет собой пару из специально подобранных явной и неявной схем. Явные схемы и схемы предиктор-корректор просто пересчитывают значение, используя информацию с предыдущих временных слоев. Использование неявной схемы приводит к решению системы большого числа уравнений на каждом временном слое.

2.2.2. Основные уравнения нестационарной теплопроводности

Теплопроводность представляет собой форму передачи энергии путем непосредственного соприкосновения отдельных частиц тела (молекул, атомов, ионов, электронов). При этом процесс теплообмена происходит вследствие передачи энергии микродвижения одних частиц другим.

Согласно закону Фурье, количество теплоты (dQ), проходящей через элемент изотермической поверхности за промежуток времени, пропорционально градиенту температуры:

$$dQ = -\lambda \text{grad}(t) dF d\tau, \quad (2.22)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, dF — элементарная площадь поверхности, м^2 ; $d\tau$ — время передачи теплоты, с.

Величина, равная количеству теплоты, проходящей в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности $q = dQ/(dF d\tau)$, называется плотностью теплового потока.

Количество теплоты Q , проходящее в единицу времени через изотермическую поверхность F , называется тепловым по-

током, Дж/с = Вт: $Q = \int_F q dF = - \int_F \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right) dF$. Величина теплового

потока Q и плотность теплового потока q являются векторами, за положительное направление которых принимают направление по нормали к изотермической поверхности в сторону уменьшения температуры. Скалярная величина вектора плотности теплового потока равна: $q = -\lambda(\partial t / \partial n)$. Скалярная величина вектора теплового потока равна: $Q = -\lambda(\partial t / \partial n)F$. Знак «минус» в правой части уравнений указывает на то, что тепловой поток и температурный градиент как векторы имеют противоположные направления.

Коэффициент теплопроводности λ — тепловой поток, передаваемый через единичную поверхность при единичном значении температурного градиента $\lambda = dQ / (F \text{grad}(t))$. Для каждого тела λ имеет свое численное значение и зависит от природы, пористости, влажности, давления, температуры и других параметров. Численное значение λ определяется опытным путем (т. е. для расчетов его следует находить в справочных таблицах). При выводе уравнения принято, что λ не зависит от температуры. Как показывают опыты, для многих материалов зависимость коэффициента теплопроводности от температуры можно принять линейной во всем рассматриваемом интервале температур $\lambda = \lambda_0(1 \pm b\Theta)$, где λ_0 — коэффициент теплопроводности при температуре (0°C); b — постоянная, характеризующая приращение (уменьшение) λ материала при повышении его температуры на 1°C .

Наилучшими проводниками теплоты являются металлы, у которых $\lambda = 16\text{--}418 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$. У большей части металлов с возрастанием температуры он уменьшается.

Распределение температуры в однородной и изотропной среде описывается дифференциальным уравнением теплопроводности — вторым законом Фурье, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \Delta t + \frac{q_v}{c\rho} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (2.23)$$

где τ — время; $a = \lambda/(c\rho)$ — коэффициент температуропроводности, характеризующий скорость изменения температуры в любой точке тела; c — теплоемкость среды; ρ — плотность тела; q_v — объемная плотность тепловыделения, Вт/м³; $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа.

Уравнение называется дифференциальным уравнением теплопроводности. Отметим, что оно однозначно выполняется при следующих допущениях: физические параметры среды постоянны во времени и пространстве; температурные деформации рассматриваемого элементарного объема малы по сравнению с самим объемом; внутренние источники теплоты распределены в рассматриваемом объеме равномерно; макрочастицы тела неподвижны относительно друг друга.

Необходимо ввести полное математическое описание данного процесса теплопроводности, чтобы получить конкретное решение уравнения для рассматриваемого случая. Эти частные особенности называются краевыми или условиями однозначности, включающими условия:

- геометрические (форма, размеры тела);
- физические (физические свойства среды и ее физические параметры);
- начальные (распределение температуры в теле в начальный момент времени);
- граничные, определяющие взаимодействие тела с окружающей средой.

Граничные условия в зависимости от вида их определения (задания) подразделяются на несколько типов:

1. Первого рода. Задается распределение температуры на поверхности тела, как функция координат и времени: $t_{\Pi} = f(x, y, z, \tau)$.
2. Второго рода. Задается распределение плотности потока на поверхности тела, как функция координат и времени. В част-

ном случае, когда плотность теплового потока на поверхности тела остается постоянной: $q_{\Pi} = f(x, y, z, \tau)$.

3. Третьего рода. Задается температура окружающей среды t_c и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой: $q_{\Pi} = \alpha (t_{\Pi} - t_c)$ если $t_{\Pi} > t_c$, где α — коэффициент теплообмена, представляющий собой плотность теплового потока, подведенного (отведенного) к единице поверхности тела при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой 1°C , Вт/(м²·град).

4. Четвертого рода. Отражают условия теплообмена системы тел, имеющих различные коэффициенты теплопроводности. Между телами предполагается идеальный контакт. Тогда $\lambda_1 |(\partial t_1 / \partial n)| = \lambda_2 |(\partial t_2 / \partial n)|$, где λ_1 — коэффициент теплопроводности первого тела; λ_2 — коэффициент теплопроводности второго тела.

В случае отсутствия в среде внутренних источников тепла, а также распространения тепла только в одном направлении (x) второе уравнение Фурье упрощается до выражения:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a(t(x, \tau)) \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (2.24)$$

Данное уравнение можно интерпретировать как уравнение диффузии (второй закон Фика [10]) для температуры.

2.2.3. Решение задачи методом конечных разностей

В качестве примера решим задачу о нахождении температурного поля $T(x, \tau)$ в тонкой бесконечной пластине толщиной h с исходной температурой T_1 при ее нагреве в стационарной среде с температурой T_2 для случая, когда коэффициент температуропроводности a постоянен. Второе уравнение Фурье для рассматриваемого случая:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (2.25)$$

Начальные условия:

$$t(0, h, 0) = t_1; \quad (2.26)$$

$$t(0, 0) = t_2; \quad (2.27)$$

$$t(h, 0) = t_2. \quad (2.28)$$

Граничные условия:

$$t(0, \tau) = t_2; \quad (2.29)$$

$$t(h, \tau) = t_2. \quad (2.30)$$

Построение конечно-разностной схемы:

Разобьем пластину по толщине на $n+1$ малых одинаковых участков (шагов) размером $\Delta x = h/n$ с номерами: 0, 1, 2, ..., i , $i+1$, ..., $n-1$, n (рис. 2.23).

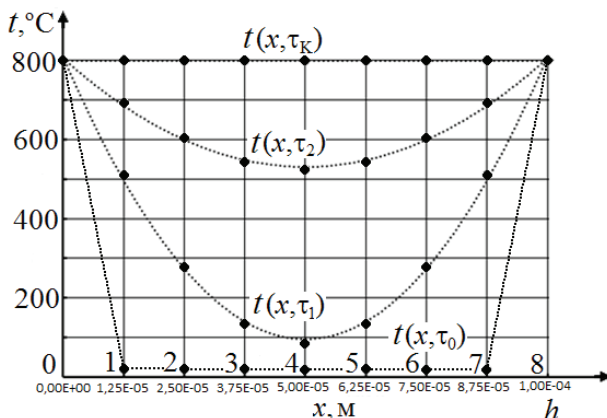


Рис. 2.23. Конечно-разностная схема распределения температуры по толщине пластины в различные моменты времени.

Шаги указаны цифрами над осью x

Используем при аппроксимации краевой задачи явные конечно-разностные схемы, как по времени, так и по координате. Для этого введем малый шаг по времени $\Delta\tau$ из условия:

$$\Delta\tau \leq \frac{(\Delta x)^2}{2a}. \quad (2.31)$$

Шаги по времени также нумеруются: 1, 2, ..., $j, j+1, \dots$

Только при выполнении условия (2.31) решение с использованием явной конечно-разностной схемы будет устойчивым, а при достаточно малых шагах по времени — сходящимся к истинному.

Запишем исходное уравнение (2.25) и граничные условия (2.29), (2.30) в виде конечно-разностных уравнений:

$$\frac{t(i, j+1) - t(i, j)}{\Delta\tau} = a \left(\frac{t(i+1, j) - 2t(i, j) + t(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \right); \quad (2.32)$$

$$t(0, j) = t_2; \quad (2.33)$$

$$t(n, j) = t_2. \quad (2.34)$$

Используя значения температуры в узлах пространственной сетки на шаге по времени « j » по преобразованным уравнениям (2.32)—(2.34), рассчитываются значения концентрации во всех на шаге « $j+1$ »:

$$t(i, j+1) = \Delta\tau a \left(\frac{t(i+1, j) - 2t(i, j) + t(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \right) + t(i, j); \quad (2.35)$$

$$t(0, j+1) = t_2; \quad (2.36)$$

$$t(n, j+1) = t_2. \quad (2.37)$$

Первый расчет производится с использованием значений температуры в начальный момент времени $t(i, 0)$ для нахождения $t(i, 1)$. Далее расчеты продолжаются до нахождения функ-

ции $t(i, j)$ вида, обусловленного условием задачи. При этом одновременно рассчитывается время процесса:

$$\tau = \tau(j) = j\Delta\tau. \quad (2.38)$$

Применим вышеприведенный алгоритм к решению конкретной технологической задачи термической обработки. Рассчитаем время нагрева полосы электротехнической стали (технический сплав Fe-3 %Si) толщиной h (0,1, 1,0, 10,0 и 100,0 мм), проходящей непрерывный рекристаллизационный отжиг при температуре 800 °С в проходной печи с постоянной скоростью. Также установим зависимость времени нагрева от толщины полосы — $\tau(h)$.

Построим упрощенную модель физического процесса нагрева полосы (рис. 2.24). Для этого примем следующие допущения:

1. Исходная температура полосы по всему ее сечению до входа в печь равна температуре окружающей среды $t_1 = 20$ °С.
2. Полоса является «тонким» теплотехническим телом, то есть ее попадание в печь не изменяет температуру последней.
3. Температура на обеих поверхностях полосы устанавливается мгновенно при попадании ее в печь, причем она равна температуре окружающей нагретой атмосферы $t_2 = 800$ °С.

Допущения 1–3 позволяют сформулировать краевые (начальные и граничные) условия для решения задачи следующим образом:

$$t(j0, h, 0) = 20 \text{ °С}; \quad (2.39)$$

$$t(0, \tau) = 800 \text{ °С}; \quad (2.40)$$

$$t(h, \tau) = 800 \text{ °С}.$$

4. Толщина полосы h настолько меньше ее ширины (обычно более 1000 мм), что теплоперенос в полосе осуществляется только в одном направлении — от поверхности к центру. Это позволяет свести задачу к одномерной по координатам, то есть вычислять именно функцию — $t(\tau, x)$.

5. Коэффициент температуропроводности в электротехнической стали является постоянным, не зависящим от температуры, т. е. $a \neq f(t(\tau, x))$. Последнее допущение является особенно «грубым» и при использовании явной конечно-разностной схемы не обязательным. Однако его принятие существенно ускоряет расчеты. При этом появляется возможность проводить расчеты по уравнениям (2.35)—(2.37).

Согласно [11] примем коэффициент температуропроводности a , $\text{м}^2/\text{с}$, равный $0,6 \cdot 10^{-6}$, соответствующий температуре 500°C для стали, содержащей около 3,0 мас. % Si.

6. Окончанием нагрева τ_k считается момент времени, когда температура центра полосы отличается от температуры поверхностей не более чем на $0,5^\circ\text{C}$.

Для решения краевой задачи используем явную конечно-разностную схему в виде системы линейных уравнений (2.35)—(2.37). Искомую непрерывную функцию $t(x, \tau)$ заменим дискретной $t(i, j)$, значения которой рассчитываются в узлах пространственно-временной сетки. Разобьем пластину на n малых одинаковых участков (шагов) размером $\Delta x = h/n$ с номерами: 0, 1, 2, ..., i , $i+1$, ..., $n-1$, n . Точность расчетов существенно возрастает с увеличением количества интервалов n . При осуществлении расчетов с использованием процессоров рекомендуется использовать число n больше «30» и желательно кратным «4». То есть «минимально-оптимальное» n равно 32. В нашем случае из соображений: 1) ускорения расчетов; 2) возможности их проиллюстрировать (сделать наглядными), примем $n = 8$ (рис. 2.24).

Будем производить расчеты с использованием программного пакета Excel (рис. 2.25). Введем в электронную таблицу значения a , h , n . Рассчитаем величины Δx и Δt . Последнюю «округлим» до более удобного значения, то есть введем заново. Построим таблицу для проведения расчетов, в последнюю строку которой (ячейки C13—K13, рис. 2.25) введем исходное распределение температуры по толщине пластины (начальное условие).

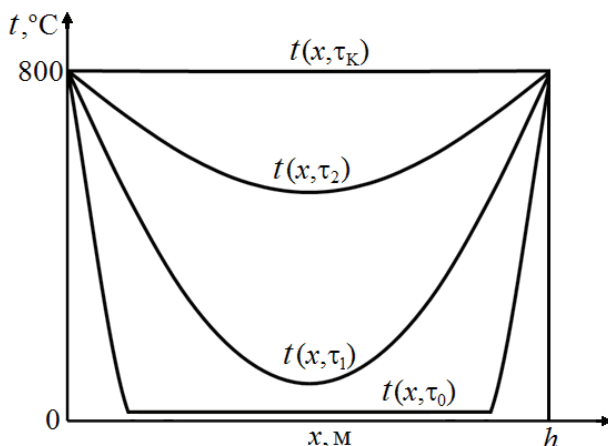


Рис. 2.24. Распределение температуры по толщине нагреваемой полосы в различные моменты времени; $t(x, \tau_0)$ — в начальный момент времени τ_0 ; $t(x, \tau_1)$ — в момент времени τ_1 ; $t(x, \tau_2)$ — в момент времени τ_2 , $t(x, \tau_k)$ — в конечный момент времени τ_k ; $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_k$; h — толщина полосы

Последние столбцы в таблице Excel (« L » и « M ») будут использоваться в дальнейшем для нумерации временных шагов (j) и расчета времени процесса нагрева согласно выражению: $\tau = j\Delta\tau$.

Введем в ячейки $C14$ и $K14$ граничные условия в виде выражений « $=C13$ » и « $=K13$ », соответственно (рис. 2.26, a). Воспроизведение данных выражений за счет их копирования при продвижении по таблице сверху вниз обеспечивает при расчете постоянное выполнение граничных условий (2.29) и (2.30).

Введем в ячейку $D14$ основную расчетную формулу (2.39) в формализованном виде, то есть с использованием уже ранее заданных или рассчитанных в таблице Excel величин (рис. 2.26, b ; верхняя строка). Скопируем содержание ячейки $D14$ в ячейки $E14$ – $J14$, то есть скопируем в эти ячейки основную расчетную формулу (рис. 2.26, $в$).

Рис. 2.25. Фрагмент электронной таблицы, иллюстрирующий задание исходных для расчета данных

а

C14	▼	:	✕	✓	f _x	=C13
11	№ шага по x - i					
12	Координаты узлов в [м] - i*Δx					
13	Исходные T, C (нач. условие)					
14	Расчетные T, C					

б

D14	▼	:	✕	✓	f _x	=(\$I4*\$I\$9)/(\$I\$8*\$I\$8)*(E13+C13-2*D13)+D13
11	№ шага по x - i					
12	Координаты узлов в [м] - i*Δx					
13	Исходные T, C (нач. условие)					
14	Расчетные T, C					

в

D14	▼	:	✕	✓	f _x	=(\$I4*\$I\$9)/(\$I\$8*\$I\$8)*(E13+C13-2*D13)+D13
11	№ шага по x - i					
12	Координаты узлов в [м] - i*Δx					
13	Исходные T, C (нач. условие)					
14	Расчетные T, C					

Рис. 2.26. Фрагмент электронной таблицы, иллюстрирующий ввод необходимых для расчета формул:
а — ввод граничных условий; б — задание основной расчетной формулы в ячейку D14; в — задание основной расчетной формулы в ячейки E14–J14

а

N37		f _k									
А	В	С	Д	Е	Е	Е	Е	Е	Е	Е	Е
11 № шага по x - j		0	1	2	3	4	5	6	7	8	М
12 Координаты узлов в [м] - i*Δx		0,00E+00	1,25E-05	2,50E-05	3,75E-05	5,00E-05	6,25E-05	7,50E-05	8,75E-05	1,00E-04	Время, с
13 Исходные T, C (нач. условие)		800	20	20	20	20	20	20	20	800	τ-j*Δτ
14 Расчетные T, C		800	320	20	20	20	20	20	320	800	0,00E+00
15		800	389	135	20	20	20	135	389	800	1,00E-05
16		800	449	188	64	20	64	188	449	800	2,00E-05
17		800	484	241	95	54	95	241	484	800	3,00E-05
18		800	512	278	135	85	135	278	512	800	4,00E-05
19		800	533	313	171	124	171	313	533	800	5,00E-05
20		800	551	343	207	160	207	343	551	800	6,00E-05
21		800	567	371	241	196	241	371	567	800	7,00E-05
22		800	581	396	274	231	274	396	581	800	8,00E-05
23		800	594	420	304	264	304	420	594	800	9,00E-05
											1,00E-04

б

C139		f _k									
А	В	С	Д	Е	Е	Е	Е	Е	Е	Е	М
134		800	800	800	799	799	799	799	800	800	1,21E-03
135		800	800	800	799	799	799	799	800	800	1,22E-03
136		800	800	800	799	799	799	799	800	800	1,23E-03
137		800	800	800	799	799	799	799	800	800	1,24E-03
138		800	800	800	800	800	799	800	800	800	1,25E-03
139 - T _k - время нагрева -		800	800	800	800	800	800	800	800	800	1,26E-03
140		800	800	800	800	800	800	800	800	800	1,27E-03
141		800	800	800	800	800	800	800	800	800	1,28E-03

Рис. 2.27. Фрагменты электронной таблицы, иллюстрирующие расчеты для нахождения времени нагрева металлической пластины с использованием метода конечных разностей:

а — начало расчета; б — окончание расчета

Совместно копируя содержание ячеек D14–M14 последовательно в нижерасположенные строки (рис. 2.27, а), выполним расчет до момента, пока по всей строке не установится одинаковое значение температуры (рис. 2.27, б). Время, рассчитанное для данного момента, и есть искомое — 0,00126 с.

Поскольку решение требовалось получить для пластин разной толщины, необходимо вернуться к началу расчета и заменить исходные данные, включая «округленный» временной шаг после его предварительного расчета. После замены исходных данных расчет должен быть повторен снова.

Все полученные в результате расчетов решения τ_k (моменты окончания нагрева) необходимо свести в табл. 2.1 и визуализировать в виде графической зависимости времени нагрева от толщины пластины (рис. 2.28), лучше также с использованием Excel.

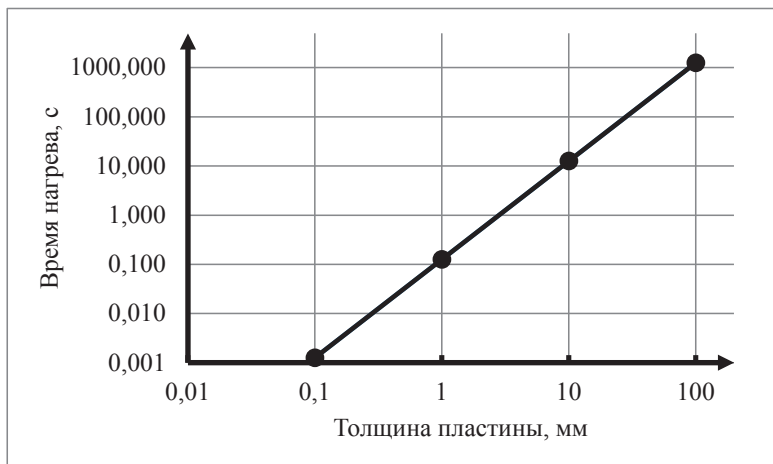


Рис. 2.28. Зависимость времени нагрева пластины от ее толщины

Таблица 2.1

Результаты расчетов времени нагрева пластин разной толщины

Толщина пластины, h , мм	0,1	1	10	100
Величина временного шага, $\Delta\tau$, с	0,00001	0,001	0,1	10
Время нагрева, τ , с	0,00126	0,12600	12,60000	1260,00000

Замечания к решению задач методом конечных разностей

Замечание 1. Использование явной конечно-разностной схемы позволяет отказаться от «грубого» приближения, сделанного в п. 5 предыдущего раздела. В действительности, коэффициент температуропроводности твердых материалов является величиной, заметно зависящей от температуры, то есть $a = f(T(\tau, x))$. При решении задач не стационарной теплопроводности, связанных с нагревом или охлаждением твердых тел, должно решаться уравнение Фурье в виде равенства (2.24).

Обычно температурная зависимость коэффициента температуропроводности приводится в дискретном (табличном) виде: конкретные значения a при конкретных температурах (табл. 2.2, 2.3).

Таблица 2.2

**Значения коэффициентов температуропроводности
для металлов и сплавов при различных температурах [11]**

$t, ^\circ\text{C}$	$a \cdot 10^{-6}, \text{ м}^2/\text{с}$								
	Al	Cu	W	Ni	Pt	Mo	Fe	Fe + 1.8%Si	Fe + 3%Si
20	86,94	112,50	62,78	17,78	24,72	54,72	21,47	9,00	6,20
100	85,00	110,0	—	14,61	25,17	51,94	17,83	8,47	6,50
200	84,44	106,11	52,75	12,67	25,17	50,56	15,31	7,74	6,76
300	83,89	102,78	—	—	25,19	—	—	7,35	6,94
400	82,78	100,0	46,72	11,53	25,36	45,83	10,31	6,63	6,77
500	82,22	96,67	—	—	25,61	—	—	5,85	6,00

Окончание табл. 2.2

$t, ^\circ\text{C}$	$a \cdot 10^{-6}, \text{м}^2/\text{с}$								
	Al	Cu	W	Ni	Pt	Mo	Fe	Fe + 1.8%Si	Fe + 3%Si
600	—	94,17	40,58	12,44	26,25	41,94	6,75	4,93	4,73
700	—	—	—	—	26,44	—	—	3,96	3,94
800	—	88,33	36,75	14,06	26,75	38,06	4,39	4,58	5,11
900	—	—	—	—	26,81	—	—	4,29	4,80
1000	—	81,11	—	—	27,03	34,72	3,80	4,00	4,50

Таблица 2.3

**Значения коэффициентов температуропроводности для сталей
при различных температурах [11]**

$t, ^\circ\text{C}$	$a \cdot 10^{-6}, \text{м}^2/\text{с}$									
	08	20	40	У8	У12	30Х	30ХН3	50 С2 Г	Г13	П18
20	16,20	14,30	13,90	13,20	12,50	12,22	9,17	7,19	3,50	7,19
100	15,28	13,61	13,33	12,78	11,94	11,81	9,11	7,39	3,61	7,11
150	14,44	12,78	12,78	11,67	11,11	11,0	9,00	7,39	3,61	7,19
200	13,33	12,22	12,22	11,11	10,56	10,50	8,81	7,39	3,72	7,00
250	12,50	11,39	11,39	10,28	10,00	10,00	8,39	7,31	3,81	7,00
300	11,67	10,56	10,83	9,72	9,44	9,31	8,19	7,00	3,89	6,81
350	11,11	10,00	10,28	8,89	8,89	8,61	7,89	6,81	4,11	6,61
400	10,00	9,17	9,44	8,33	8,06	7,89	7,39	6,50	4,11	6,67
450	9,17	8,61	8,61	7,78	7,78	7,19	6,69	6,08	4,31	6,00
500	8,06	7,78	7,78	6,94	7,22	6,50	6,31	5,81	4,00	5,61
550	7,22	7,22	6,94	6,39	6,67	5,81	5,81	5,50	4,00	5,42
600	6,39	6,39	6,39	6,11	6,11	5,19	5,28	5,00	4,50	5,22
650	5,83	5,83	5,83	5,83	5,56	4,58	3,06	4,58	4,61	5,00
700	5,00	5,00	5,28	5,28	4,72	2,50	3,19	4,50	4,69	4,42
750	3,61	2,78	2,50	1,94	1,67	3,81	6,11	2,50	4,81	4,31
800	3,89	3,89	5,56	5,56	5,28	5,50	5,39	5,31	4,81	4,50
850	4,17	4,72	5,00	5,28	5,28	5,56	5,56	5,39	4,92	4,31
900	5,44	5,28	5,28	5,28	5,28	5,81	5,69	5,50	5,00	5,50
950	5,28	5,28	5,28	5,59	5,28	5,89	5,69	5,56	5,11	5,50
1000	5,56	5,56	5,56	5,56	5,56	5,89	5,69	5,56	5,19	5,50
1050	5,56	5,56	5,83	5,56	5,56	6,00	5,81	5,56	5,03	5,50
1100	5,83	5,83	5,83	5,83	5,83	5,56	5,89	5,69	5,03	5,50

Подобный вид экспериментально полученной зависимости позволяет аппроксимировать ее непрерывной функцией (удобнее всего полиномом вида: $a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$, где a_k — постоянные коэффициенты) с использованием программных средств Excel. А затем использовать полученные функции для решения задач по конечно-разностным схемам, подставляя в расчетные формулы значения $a(t(i, j))$, вычисленные при температурах, полученных с предыдущего шага вычислений, то есть:

$$t(i, j+1) = \Delta \tau a(t(i, j)) \left(\frac{t(i+1, j) - 2t(i, j) + t(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \right) + t(i, j). \quad (2.41)$$

Замечание 2. Для решения некоторых задач, в случае, когда температурный фронт является не плоским, но имеет строго выраженную симметрию (сферическую, цилиндрическую), оказывается полезным использовать второе уравнение Фурье в следующем виде:

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^q} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^q a \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad (2.42)$$

где r — пространственная координата; q — коэффициент, определяющий симметрию системы: $q = 0$ — плоская (т. е. $r \equiv x$); $q = 1$ — цилиндрическая; $q = 2$ — сферическая.

Использование уравнения (2.32) позволяет решать задачи пространственной теплопроводности как одномерные. Найдем полную производную правой части уравнения (2.32):

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a q \frac{r^{q-1}}{r^q} \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} + a \frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2}. \quad (2.43)$$

Последнее уравнение может быть использовано для построения расчетных конечно-разностных уравнений, аналогичных (2.32), для задач различных симметрий. Для сферической:

$$t(i, j+1) = \Delta\tau a \left(\frac{t(i+1, j) - 2t(i, j) + t(i-1, j)}{(\Delta r)^2} \right) + \frac{2\Delta\tau a}{r(i)} \left(\frac{t(i+1, j) - t(i-1, j)}{2\Delta r} \right) + t(i, j) \quad (2.44)$$

и для цилиндрической:

$$t(i, j+1) = \Delta\tau a \left(\frac{t(i+1, j) - 2t(i, j) + t(i-1, j)}{(\Delta r)^2} \right) + \frac{\Delta\tau a}{r(i)} \left(\frac{t(i+1, j) - t(i-1, j)}{2\Delta r} \right) + t(i, j), \quad (2.45)$$

где $r(i)$ — координатная сеточная функция, задаваемая в начале расчета.

Следует помнить, что при решении задач, имеющих полярную (цилиндрическую или сферическую) симметрию, удобным является выбор начала координат в центре симметрии анализируемой системы.

Замечание 3. В рассмотренном примере краевая задача нестационарной теплопроводности была решена при выполнении граничных условий 1-го рода: $t(x = 0, \tau) = \varphi_1(\tau)$ и $t(x = h, \tau) = \varphi_2(\tau)$, где $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ — некоторые функции от времени. При этом решение было получено для самого простого типа подобных граничных условий (стационарных), то есть $t(x = 0, \tau) = t(x = h, \tau) = \text{const} = 800^\circ\text{C}$. Очевидно, что задание граничных условий в виде конкретных, то есть заранее известных, функций $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ не существенно усложняет задачу. Просто становится необходимым на каждом временном шаге дополнительно вычислять $t(0, j)$ и $t(n, j)$.

Решение задачи нестационарной теплопроводности существенно усложняется, если необходимо при ее решении использовать граничные условия второго, третьего или смешанного

родов. Достаточно частым случаем является реализация условия, при котором на границе рассматриваемой области возникает перекрытие встречных равных потоков.

Покажем возможность задания граничного условия с учетом перекрывающихся встречных потоков тепла на уже решенной задаче. Отметим, что рассчитываемое температурное поле имеет центр симметрии — узел координатной сетки «4» (рис. 2.24), в котором в течение всего процесса нагрева температура имеет минимальное значение. Это позволяет решать задачу не для всей толщины пластины (h), а только для ее половины ($h/2$), задав новое граничное условие:

$$\frac{\partial T(x = h/2, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (2.46)$$

В конечно-разностном виде данное условие эквивалентно расчетной формуле (2.32). С учетом того, что температуры в $i-1$ и $i+1$ узлах всегда равны между собой, то есть $T(i-1, j) = T(i+1, j)$, условие для i -го (граничного в данном случае) узла можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta \tau} = a \left(\frac{2T(i-1, j) - 2T(i, j)}{(\Delta x)^2} \right), \quad (2.47)$$

или

$$T(i, j+1) = \Delta \tau a \left(\frac{2T(i-1, j) - 2T(i, j)}{(\Delta x)^2} \right) + T(i, j). \quad (2.48)$$

Используя уравнение (2.48) как расчетную формулу в Excel, можно решить задачу о времени нагрева пластины с той же точностью, что в приведенном примере, но на количестве узлов координатной сетки в два раза меньшем.

Замечание 4. Некоторую трудность вызывает задание граничных условий в случае неограниченности размеров тела с одной стороны — нагрев массивного образца. Для моделирования «полубесконечности» можно проводить расчеты для области $L = L_\infty$, которая по своим размерам существенно превышает реальную область изменения температуры в образце. Ее размеры можно оценить следующим образом:

$$L_\infty \gg a\tau^{1/2} \text{ или } L_\infty \approx 10a\tau^{1/2}. \quad (2.49)$$

При этом в узле с координатой $x = L_\infty$ может быть задано граничное условие первого рода: $t(L_\infty, \tau) = t_0$, где t_0 — исходная температура образца.

Заключение

Рассмотренные примеры простых реализаций моделей в табличных процессорах, как пример применения математического моделирования, позволяют не только описать какой-либо процесс или явление, но и дают инструменты контроля работы оборудования, разработки новых технологических процессов и совершенствования существующих, как и в целом весь технологический цикл производства изделия.

Наличие таких возможностей по контролю производственных процессов на новом, ранее недостижимом уровне даст возможность повысить точность воспроизведения технологических операций, а следовательно, качество производимых изделий.

Библиографический список

1. Большой энциклопедический словарь / под ред. А. М. Прохорова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Большая Российская энциклопедия, 2000. — 1456 с.
2. The New Encyclopaedia Britannica, 15th Edition by Chairman, (32 Volume Set) / Encyclopaedia Britannica, Incorporated. — 1992. — p. 32030.
3. Айвазян, С. А. Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных : справочное изд. / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. — Москва : Финансы и статистика, 1983. — 471 с.
4. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений : учебник для государственных университетов / В. В. Степанов. — 9-е изд., стер. — Москва : Эдиториал УРСС, 2006. — 472 с.
5. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. — Москва : АСТ : Астрель, 2006. — 991 с.
6. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон — Москва : Наука, 1966. — 664 с.
7. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. — Москва : Высшая школа, 2002. — 840 с.
8. Мареев, В. В. Основы методов конечных разностей / В. В. Мареев, Е. Н. Станкова. — Санкт-Петербург : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. — 64 с.
9. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин; под редакцией А. А. Самарского. — Москва : Наука,

- главная редакция физико-математической литературы, 1978. — 512 с.
10. Лобанов, М. Л. Методы определения коэффициентов диффузии : учебное пособие / М. Л. Лобанов, М. А. Зорина. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 100 с.
 11. Казанцев, Е. И. Промышленные печи : справочное руководство для расчетов и проектирования / Е. И. Казанцев. — Москва : Металлургия, 1975. — 368 с.

Список рекомендуемой литературы

1. Дыхненко, Л. М. Основы моделирования сложных систем : учебное пособие для втузов / Л. М. Дыхненко [и др.]. — Киев : Вища школа, 1981. — 359 с.
2. Ибрагимов, И. А. Моделирование систем : учебное пособие / И. А. Ибрагимов [и др.]. — Баку : Азинефтехим, 1989. — 83 с.
3. Лебедев, А. Н. Моделирование в научно-технических исследованиях / А. Н. Лебедев. — Москва : Радио и связь, 1989. — 224 с.
4. Советов, Б. Я. Моделирование систем : учебник для вузов / Б. Я. Советов, С. Я. Яковлев. — Москва : Высшая школа, 1998. — 320 с.
5. Вагер, Б. Г. Численные методы решения дифференциальных уравнений : учебное пособие / Б. Г. Вагер. — Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2003. — 114 с.
6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — Москва : Изд-во МГУ, 1999. — 798 с.

7. Мареев, В. В. Основы методов конечных разностей / В. В. Мареев, Е. Н. Станкова. — Санкт-Петербург : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. — 64 с.
8. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин; под ред. А. А. Самарского. — Москва : Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1978. — 512 с.
9. Соловейчик, Ю. Г. Метод конечных элементов для скалярных и векторных задач / Ю. Г. Соловейчик, М. Э. Рояк, М. Г. Персова. — Новосибирск : НГТУ, 2007. — 896 с.
10. Огородникова, О. М. Вычислительные методы в компьютерном инжиниринге : учебное пособие / О. М. Огородникова. — Екатеринбург : УрФУ, 2013. — 130 с.
11. Стародубцев, Ю. Н. Магнитомягкие материалы : энциклопедический словарь-справочник / Ю. Н. Стародубцев. — Москва : Техносфера, 2011. — 664 с.
12. Казанцев, Е. И. Промышленные печи: справочное руководство для расчетов и проектирования / Е. И. Казанцев. — Москва : Металлургия, 1975. — 368 с.

Приложение 1

**Таблица совместимости функций MS Excel
и OpenOffice/LibreOffice Calc**

Calc	Excel 2007 и более поздние версии	Описание
ABS	ABS	Возвращает модуль (абсолютную величину) числа
AND	И	Возвращает значение ИСТИНА, если все аргументы имеют значение ИСТИНА
AVERAGE	СРЗНАЧ	Возвращает среднее арифметическое аргументов
COUNT	СЧЕТ	Подсчитывает количество чисел в списке аргументов
COUNTIF	СЧЕТЕСЛИ	Подсчитывает количество ячеек в диапазоне, удовлетворяющих заданному условию
IF	ЕСЛИ	Выполняет проверку условия
MAX	МАКС	Возвращает наибольшее значение в списке аргументов
MIN	МИН	Возвращает наименьшее значение в списке аргументов
PI	ПИ	Возвращает число π
SUM	СУММ	Суммирует аргументы
SUMPRODUCT	СУММПРОИЗВ	Возвращает сумму произведений соответствующих элементов массивов
SUMSQ	СУММКВ	Возвращает сумму квадратов аргументов

Приложение 2

Регуляторы температуры

Самым простым регулятором является устройство Вкл./Выкл. регулирования, которое работает по принципу: если температура ниже целевой, то подача энергии осуществляется. В противном случае нагрев отключен.

Однако наиболее часто на практике встречаются решения типа П, ПД, ПИ, ПИД регуляторов. Данные обозначения являются сокращением от понятия: устройство регулирования, обеспечивающее на своем выходе связь регулируемого параметра или его изменения, описываемую передаточной функцией типа П, ПИ и т. д. При этом:

- П — означает «пропорциональный»;
- И — «интегральный»;
- Д — «дифференциальный»;
- ПИ — «пропорциональный и интегральный»;
- ПД — «пропорциональный и дифференциальный»;
- ПИД — «пропорциональный, интегральный и дифференциальный».

Важно понимать, что в подавляющем большинстве случаев эти регуляторы обеспечивают отрицательную обратную связь изменения регулируемого параметра. Так, при изменении температуры на некую положительную величину e (при повышении температуры до уровня $X+e$) к стандартному входному сигналу U нагревателя будет добавлен отрицательный сигнал регулятора u . Результирующим сигналом на входе нагревателя будет, таким образом, $U-u$, что уменьшит выходную мощность нагревателя, и, следовательно, температуру.

Очень часто величину e называют «ошибкой» или «отклонением», X — «заданным уровнем» или «заданным значением», причем X .

Рассмотрим работу ПИД регулятора, как наиболее полного и включающего в себя все остальные типы. Любой другой может быть получен путем обнуления коэффициента передачи при соответствующем слагаемом передаточной функции.

Передаточная функция ПИД регулятора описывается уравнением:

$$u(t) = П + И + Д = K_{\text{п}}e(t) + K_{\text{и}} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_{\text{д}} \frac{de}{dt},$$

где τ — время с того момента, как изменение e регулируемой величины стало отличным от нуля (значимо отличным).

Видно, что функция содержит 3 слагаемых: пропорциональное, интегральное и дифференциальное.

Пропорциональное регулирование (П-регуляторы): величина поправки в регулирующее воздействие пропорциональна величине отклонения. Чем больше отклонение температуры от заданного уровня, тем сильнее следует изменить мощность нагревателя для компенсации изменения. Передаточная функция П-регулятора описывается уравнением: $u(t) = P$ (другие коэффициенты уравнения равны нулю).

Интегральное регулирование: величина поправки в регулирующее воздействие зависит от накопленного действия отклонения регулируемой величины. Если накопленное действие пониженной температуры растет (интеграл от изменения), то это слагаемое даст дополнительное приращение мощности нагревателя.

Дифференциальное регулирование: величина поправки в регулирующее воздействие зависит от скорости изменения регулируемого параметра.

Приложение 3

Задания по моделированию нагрева в лабораторных печах с различным типом регулирования

Задание	Исходные данные для режима нагрева
1. Расчет модели нагрева с потерей тепла конвекцией и излучением при двухдиапазонном регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: с печью.
2. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при пропорциональном регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: с печью.
3. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при пропорциональном регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: 10 °С в минуту.
4. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при дифференциальном регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: 10 °С в минуту.
5. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при ПД регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: с печью.
6. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при ПИД регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: с печью.
7. Расчет модели нагрева с потерей тепла через конвекцию и излучением при пропорциональном регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: 10 °С в минуту.
8. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при ПИД регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: 10 °С в минуту.

Задание	Исходные данные для режима нагрева
9. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при ПИ регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: 10 °С в минуту.
10. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при ПИ регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: с печью.
11. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при ПД регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: с печью.
12. Расчет модели нагрева с потерей тепла через конвекцию и излучением при пропорциональном регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: 10 °С в минуту.
13. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при ПИ регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: 10 °С в минуту.
14. Расчет модели нагрева с потерей тепла через контактную поверхность и излучением при ПИД регулировании	Температура нагрева 500 °С; выдержка 30 минут; скорость охлаждения: 10 °С в минуту.

Задания по решению задач нестационарной теплопроводности

Задание	Исходные данные
1. Расчет времени нагрева слитка алюминия цилиндрической формы (под трубную заготовку) в зависимости от его диаметра	Температура посадки слитка в колодец 50 °С; температура нагрева 500 °С; диаметр слитка $D = 30, 50, 100$ мм. При расчетах пренебречь температурной зависимостью коэффициента температуропроводности (табл. 2.2).

Задание	Исходные данные
2. Расчет времени нагрева рулона из инструментальной стали P18	Температура посадки рулона в печь 20 °С; температура нагрева 1200 °С. Нагрев печи происходит за 20 часов по линейному закону. Внутренний диаметр рулона 500 мм, внешний — 1100 мм. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.3).
3. Расчет времени охлаждения стальной трубы (Ст20)	Температура трубы в печи 880 °С, температура охлаждающей среды 20 °С. Диаметр трубы 56 мм. Толщина стенки трубы 6 мм. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.3).
4. Расчет времени нагрева медных пластин в зависимости от их толщины	Температура посадки пластин в печь 20 °С; температура нагрева 1000 °С; толщина пластин $h = 20, 40, 80$ и 160 мм. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.2).
5. Расчет времени охлаждения железного метеорита идеальной сферической формы	Температура метеорита в момент падения 1000 °С, температура окружающей среды 20 °С. Диаметр метеорита 1000 мм. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.2).
6. Расчет времени нагрева слэбов инструментальной стали У12 в зависимости от их толщины	Температура посадки слэбов в печь 20 °С; температура нагрева 1000 °С; толщина слэбов $h = 20, 40, 80$ и 160 мм. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.3).
7. Расчет времени установления теплового равновесия в медной пластине (обкладка кристаллизатора при непрерывной разливке), разделяющей среды с различными температурами	Толщина пластины кристаллизатора 150 мм. Температура внутри кристаллизатора равна температуре расплавленной стали — 1500 °С. Температура снаружи кристаллизатора равна температуре охлаждающей жидкости (вода) — 20 °С. Определить время, по истечении которого температурное поле по толщине пластины перестает меняться. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.2).

Задание	Исходные данные
8. Сравнение времени нагрева изделий, выполненных из одного материала, но отличающихся формой	Рассчитать и сравнить время нагрева от комнатной температуры 20 °С до 1000 °С: пластины толщиной 20 мм, цилиндра диаметром 20 мм, шара диаметром 20 мм, выполненных из стали У8. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента
9. Сравнение времени нагрева изделий, имеющих одну и ту же форму, но отличающихся материалом	Рассчитать время нагрева цилиндрических стержней диаметром 10 мм от комнатной температуры 20 °С до 600 °С, выполненных из различных материалов: 1) алюминия; 2) меди; 3) никеля; 4) железа. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.2).
10. Влияние количества углерода в материале на время нагрева стальных изделий	Рассчитать время нагрева стальных пластин толщиной 10 мм от 20 до 900 °С, выполненных из сталей: 1) 08; 2) 40; 3) У8; 4) У12. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.3).
11. Влияние легирования на время нагрева стальных изделий	Рассчитать время нагрева стальных пластин толщиной 6 мм от 20 до 900 °С, выполненных из сталей: 1) 20; 2) 30Х; 3) 50С2Г; 4) Г13. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.3).
12. Расчет времени нагрева биметаллического изделия	Рассчитать время нагрева биметаллической пластины толщиной 1,6 мм, выполненной из стали 08 и меди (толщина стального слоя 1,0 мм), от комнатной температуры (20 °С) до 900 °С. При расчетах учесть температурную зависимость коэффициента температуропроводности (табл. 2.2, 2.3).

Приложение 4

Общие рекомендации по организации расчетов в табличных процессорах

При решении задач моделирования в табличных процессорах, таких как MS Excel или OpenOffice/LibreOffice Calc, важно не только правильно писать в ячейки формулы, но и правильно сформировать рабочее пространство расчета.

Это необходимо, например, потому что в дальнейшем может потребоваться расширение расчета или его изменение. При этом сложность уже построенного расчета может быть достаточной для того, чтобы его изменения привели к появлению непредвиденных и труднопреодолимых сложностей. Проще говоря, расчет может просто «сломаться». Поэтому правильное построение расчета является очень важным моментом наряду с корректным введением расчетных выражений.

Для построения гибкого, масштабируемого и устойчивого расчета следует придерживаться рекомендаций:

1. Необходимо заранее расположить расширение расчета таким образом, чтобы данные вводились сверху вниз. Также необходимо начинать расчет в верхней точке с возможностью его растяжки вниз. Это позволит в дальнейшем простым растягиванием строк вниз расширять расчет на большее количество точек.

2. Для большей гибкости необходимо строить расчет таким образом, чтобы модернизация или усовершенствование его не ломало. Это значит, что если сформировать расчет поэтап-

но, т.е. каждый этап в отдельном столбце строки, то это позволит добавлять в расчет новые столбцы для его расширения вправо. При этом предыдущая часть не будет претерпевать значительных правок. Такая конфигурация сделает его устойчивым к расширению.

3. Обязательно следует подписывать все введенные данные, все обозначения таким образом, чтобы было понятно, что за величина введена в данную ячейку и как она используется. Обозначения должны быть подчинены общему правилу, которого необходимо придерживаться во всем расчете. Это повысит устойчивость расчета к непредвиденным ошибкам, обусловленным неправильным использованием введенных данных.

4. Необходимо строго придерживаться правила непрерывности расчета, когда изначально введенные данные используются именно из места их ввода. Т.е. даже если вдруг возникнет необходимость их изменить, то расчет полностью будет пересчитан с учетом новых данных автоматически. Этого можно достичь только путем ссылок и ни в коем случае не ручным вводом каких-либо данных, дублирующих уже введенные данные.

5. Используемые в расчете выражения следует делать настолько простыми, насколько это возможно без значительного «раздутия» расчета. Необходимо придерживаться баланса в прозрачности расчетов и их сложности. Это означает, что лучше всего использовать понятные по смыслу выражения, чтобы при первом же взгляде было ясно, какое выражение либо какая часть сложного выражения представлена в данной ячейке. Если же используемое для расчета выражение громоздко, то это значительно повышает риск возникновения не только ошибки по невнимательности при его вводе, но и скрытых ошибок, обусловленных отсутствием закреплений ссылок. И при дальнейшем расширении этого выражения на другие ячейки оно будет генерировать неправильный результат. Поэтому при возникновении подобных рисков рекомендуется разбить это выражение на логически понятные части и рассчитывать их в отдель-

ных ячейках. Например, это может быть отдельное вычисление числителя и знаменателя дроби или же отдельное вычисление какого-либо многочлена.

6. По возможности следует пользоваться встроенными функциями, включающими однотипные широко используемые виды расчетов, такие как, например, среднее значение или средне-квадратическое значение. Это не только сократит сам расчет, но и улучшит его читаемость. Ведь большинство используемых в расчетах выражений построено с применением таких действий, которые можно считать с помощью готовых к использованию встроенных функций.

